Akademia Morska w Gdyni
Katedra Automatyki Okrętowej

Teoria sterowania

Rachunek operatorowy

Mirosław Tomera

1. TRANSFORMATA LAPLACE'A

Transformata Laplace'a jest jednym z narzędzi matematycznych służących do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. W porównaniu z metodą klasyczną, metoda transformaty operatorowej przekształca równanie różniczkowe zwyczajne w równanie algebraiczne, którego zmienną jest operator Laplace'a *s*. Wówczas, w celu uzyskania rozwiązania w dziedzinie operatora *s* przekształca się równanie algebraiczne przy użyciu prostych reguł matematycznych. Ostateczne rozwiązanie równania różniczkowego uzyskiwane jest poprzez zastosowanie odwrotnej transformaty Laplace'a.

1.1. DEFINICJA TRANSFORMATY LAPLACE'A

Mając funkcję czasową *f(t)* spełniającą następujący warunek

$$\int_0^\infty \left| f(t)e^{-\sigma t} \right| dt < \infty \tag{1}$$

dla pewnej skończonej liczby rzeczywistej σ, *transformatę Laplace'a* tej funkcji wyznacza się następującej całki

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{2}$$

Zmienna *s* określana tutaj jako *operator Laplace'a* i jest zmienną zespoloną określoną wzorem $s = \sigma + j\omega$. Równanie (2) znane jest również pod nazwą jednostronnej transformaty Laplace'a w której wykonywane jest całkowanie w zakresie czasu od $t = 0$ do ∞. Oznacza to, że wszystkie informacje zawarte w funkcji $f(t)$ przed czasem $t = 0$ są pomijane lub przyjmowane jako równe zero. Założenie to nie nakłada żadnych ograniczeń na stosowanie transformaty Laplace'a do rozwiązywania problemów w liniowych układach sterowania. W zwykłych problemach w dziedzinie czasu, czas odniesienia jest przyjmowany jako $t = 0$. W układach fizycznych w których sygnał wejściowy jest przyłożony w chwili $t = 0$, odpowiedź na to pobudzenie nie może pojawić się wcześniej, aniżeli w $t = 0$; tzn. odpowiedź nie może wyprzedzać pobudzenia.

Transformata Laplace'a powinna zostać zdefiniowana dla przedziału czasu od $t = 0^-$ do ∞. Symbol $t = 0^-$ oznacza, że granica dla czasu $t \to 0$ brana jest z lewej strony $t = 0$. Takie ograniczenie brane jest pod uwagę w tych przypadkach, gdy funkcja $f(t)$ ma postać funkcji skokowej lub impulsowej w których to funkcjach zmiana następuje w chwili $t = 0$. Jednak równanie definiujące transformatę Laplace'a bardzo rzadko jest używane, rozwiązując zadania korzysta się z wyrażeń zawartych w tabeli transformat Laplace'a (tabela 2), dlatego też w dalszej części tego opracowania pominięto ten problem i wszystkie warunki początkowe rozpatrywane są dla czasu $t = 0$.

Poniżej wyznaczone zostały transformaty kilku typowych funkcji czasowych.

Przykład 1

Funkcja ekspotencjalna zdefiniowana jest następująco

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \cdot e^{-\sigma t} & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

gdzie A oraz σ są stałymi. Transformata Laplace'a funkcji ekspotencjalnej (1.1) może być wyznaczona następująco

$$F(s) = \pounds\left\{Ae^{-\sigma t}\right\} = \int_0^\infty Ae^{-\sigma t}e^{-st}\,dt = A\int_0^\infty e^{-(\sigma+s)t}\,dt = -A\frac{e^{-(s+\sigma)t}}{s+\sigma}e^{-st}\Bigg|_0^\infty = \frac{A}{s+\sigma} \tag{1.2}$$

Jak widać funkcja ekspotencjalna tworzy biegun na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Przykład 2

Funkcja skokowa

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

gdzie A jest stałą. Łatwo zauważyć, że funkcja (2.1) jest specjalnym przypadkiem funkcji ekspotencjalnej gdy $\sigma = 0$. Transformata Laplace'a funkcji skokowej

$$F(s) = \pounds\{A\} = \int_0^\infty Ae^{-st}\,dt = -\frac{A}{s}e^{-st}\Bigg|_0^\infty = \frac{A}{s} \tag{2.2}$$

Funkcja skokowa, której wysokość jest jednostkowa (A = 1) nazywana jest *jednostkową funkcją skokową*. Fizycznie funkcja skokowa pojawia się w czasie t = 0 i odpowiada stałej wartości sygnału przyłożonej do układu w chwili t równej zero.

Przykład 3

Funkcja liniowo narastająca

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie A jest stałą. Transformatę Laplace'a funkcji liniowo narastającej uzyskiwana jest następująco:

$$F(s) = \pounds\{At\} = \int_0^\infty Ate^{-st}\,dt = \frac{Ate^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{Ae^{-st}}{-s}\,dt = \frac{A}{s^2} \tag{3.2}$$

Przy wyznaczaniu zależności (3.2) zastosowana została metoda całkowania przez części

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

gdzie $u = At$ oraz $dv = e^{-st}dt$

Przykład 4

Funkcja sinusoidalna

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A\sin\omega t & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

gdzie A oraz ω są stałymi. Funkcja $\sin\omega t$ może zostać zapisana następująco:

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \tag{4.2}$$

Stąd

$$F(s) = \mathcal{L}\{A \sin \omega t\} = \frac{A}{2j}\int_0^\infty \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st}\,dt = \frac{A}{2j}\frac{1}{s - j\omega} - \frac{A}{2j}\frac{1}{s + j\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{4.3}$$

W bardzo podobny sposób wyznacza się transformatę funkcji $A\cos \omega t$

$$F(s) = \mathcal{L}\{A \cos \omega t\} = \frac{As}{s^2 + \omega^2} \tag{4.4}$$

Przykład 5

Funkcja impulsowa jednostkowa (funkcja delta Diraca)

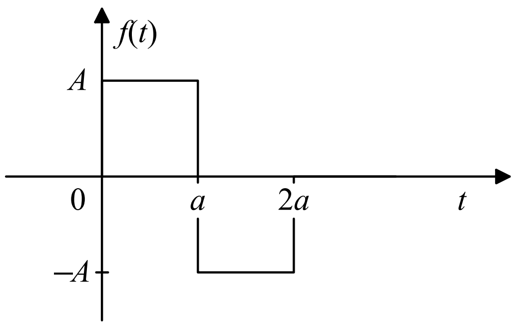
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Transformatę Laplace'a tej funkcji impulsowej

$$F(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1 \tag{5.2}$$

Przykład 6

Wyznacz transformatę Laplace'a $F(s)$ funkcji pokazanej na rysunku 1, gdzie $f(t) = 0$, dla $t < 0$ oraz dla $t > 2a$.



Rys.1. Funkcja $f(t)$

Funkcja $f(t)$ może zostać zapisana następująco:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 < t \le a \\ -A & a < t \le 2a \\ 0 & t > a \end{cases} \tag{6.1}$$

lub w inny sposób

$$f(t) = A \cdot 1(t) - 2A \cdot 1(t-a) + A \cdot 1(t - 2a) \qquad \text{dla} \quad 0 \le t < 2a \tag{6.2}$$

Transformata Laplace'a funkcji (6.1)

$$F(s) = \pounds\{f(t)\} = \int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{a} Ae^{-st}dt + \int_a^{2a} -Ae^{-st}dt \tag{6.3}$$

Dalszy ciąg obliczeń zależności (6.3)

$$F(s) = \left.\frac{Ae^{-st}}{-s}\right|_0^a - \left.\frac{Ae^{-st}}{-s}\right|_a^{2a} = A\left(\frac{e^{-as}-1}{-s} + \frac{e^{-2as}-e^{-as}}{s}\right) \tag{6.4}$$

Ostatecznie

$$F(s) = \frac{A}{s}\left(e^{-2as} - 2e^{-as} + 1\right) = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-as}\right)^2 \tag{6.5}$$

Rozwiązanie (6.5) można uzyskać wychodząc z równania (6.2)

$$F(s) = \pounds\{f(t)\} = \pounds\{A\cdot 1(t)\} + \pounds\{-2A\cdot 1(t-a)\} + \pounds\{A\cdot 1(t-2a)\} \tag{6.6}$$

Dalej przekształcając równanie (6.6)

$$F(s) = A\frac{1}{s} - 2A\frac{1}{s}e^{-as} + A\frac{1}{s}e^{-2as} = \frac{A}{s}\left(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right) = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-as}\right)^2 \tag{6.7}$$

Ostatecznie wynik uzyskany w równaniu (6.7) pokrywa się z wynikiem (6.5).

Jeśli funkcja $f(t)$ jest funkcją okresową o okresie T, wówczas

$$F(s) = \pounds\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-sT}} \tag{3}$$

1.2. ODWROTNA TRANSFORMATA LAPLACE'A

Operację wyznaczania funkcji $f(t)$ z danej transformaty operatorowej Laplace'a $F(s)$ wykonuje się przy użyciu *odwrotnej transformaty Laplace'a*, a którą wyznacza się z następującego wzoru

$$\pounds^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds = \begin{cases} f(t), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{4}$$

gdzie c jest stałą, która jest większa od części rzeczywistych wszystkich punktów funkcji na płaszczyźnie s, w których funkcja $F(s)$ nie istnieje. Równanie (3) opisuje całkowanie wzdłuż linii znajdującej się na płaszczyźnie s. Dla prostych funkcji, operacja znajdowania odwrotnej transformaty operatorowej polega na wyszukaniu odpowiedniej funkcji z tabeli transformat Laplace'a (tabela 2). Dla funkcji złożonych, odwrotna transformata Laplace'a znajdowana jest przez rozkład na ułamki proste i następnie przez zastosowanie tabeli transformat.

Do rozkładu funkcji operatorowej $F(s)$ na ułamki proste mogą być używane również programy komputerowe takie jak np. *residue* z pakietu MATLABA.

1.3. WAŻNE TWIERDZENIA Z TRANSFORMATY LAPLACE'A

Korzystanie z transformaty Laplace'a w wielu wypadkach upraszcza się przez wykorzystanie odpowiedniej własności transformaty. Własności te zebrane zostały w tabeli 1.

Mnożenie przez stałą

Niech k będzie stałą, a $F(s)$ transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$. Wtedy

$$\pounds\{kf(t)\} = kF(s)$$

Tabela 1. Podstawowe własności transformaty Laplace'a

1. Liniowość

$$\mathcal{L}\{ af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s),\ a, b \text{ – stałe}$$

2. Całkowanie w dziedzinie rzeczywistej

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt$$

3. Różniczkowanie w dziedzinie rzeczywistej

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

3.a. pierwsza pochodna

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

3.b. druga pochodna

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0)$$

4. Całkowanie w dziedzinie zespolonej (zmiennej s)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} F(s)ds$$

5. Różniczkowanie w dziedzinie zespolonej (zmiennej s)

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

6. Przesunięcie w dziedzinie rzeczywistej

$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT} F(s)$, T jest stałą

7. Twierdzenie o wartości początkowej

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

8. Twierdzenie o wartości końcowej

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

9. Przesunięcie w dziedzinie zespolonej (zmiennej s)

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$$

10. Zmiana skali

$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$, a jest stałą dodatnią

11. Splot funkcji (twierdzenie Borela)

$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = F_1(s)F_2(s)$, gdzie $f_1(t) * f_2(t) = \int_{0^-}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$

Twierdzenie o wartości końcowej (tabela 1, pkt. 8) jest bardzo pomocne w analizie i projektowaniu układów sterowania. Wartość końcowa funkcji czasowej wyznaczana jest poprzez znajomość zachowania jej transformaty operatorowej w punkcie $s = 0$. Twierdzenie o wartości końcowej jest

Tabela 2. Wybrane transformaty Laplace'a

	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$ (impuls jednostkowy)	1
2.	$1(t)$ (skok jednostkowy)	$\frac{1}{s}$
3.	$\delta_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\cdot 1(t)$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$
4.	$t\cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5.	$\frac{1}{2}t^2\cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^3}$
6.	$\frac{1}{n!}t^n\cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
7.	$e^{\sigma t}\cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\sigma}$
8.	$te^{\sigma t}\cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2}$
9.	$\frac{1}{n!}t^n e^{\sigma t}\cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^{n+1}}$
10.	$\sin\omega t\cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11.	$\cos\omega t\cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12.	$t\sin\omega t\cdot 1(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
13.	$t\cos\omega t\cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
14.	$e^{\sigma t}\sin\omega t\cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
15.	$e^{\sigma t}\cos\omega t\cdot 1(t)$	$\frac{(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
16.	$Ae^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)\cdot 1(t)$	$\frac{\frac{1}{2}Ae^{j\phi}}{s-\sigma+j\omega}+\frac{\frac{1}{2}Ae^{-j\phi}}{s-\sigma-j\omega}$

nieprawdziwe jeśli $sF(s)$ zawiera pewne bieguny, których część rzeczywista jest równa zero lub dodatnia. Poniższy przykład ilustruje z jaką ostrożnością musi być stosowane twierdzenie o wartości końcowej.

Przykład 7

Rozważ funkcję operatorową postaci

$$F(s)=\frac{5}{s\left(s^2+s+2\right)} \tag{7.1}$$

Ponieważ funkcja $sF(s)$ nie posiada biegunów na osi urojonych i w prawej półpłaszczyźnie, dlatego też może być zastosowane twierdzenie o wartości końcowej.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{5}{s^2+s+2}=\frac{5}{2} \tag{7.2}$$

Rozważmy jeszcze jedną funkcję

$$F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{7.3}$$

która jest transformatą funkcji $f(t)=\sin\omega t$. Z tego powodu, że funkcja ta ma dwa bieguny $sF(s)$ na osi urojonej płaszczyzny s, w tym przypadku nie może być zastosowane twierdzenie o wartości końcowej. Chociaż dla funkcji operatorowej (7.3) twierdzenie o wartości końcowej daje wartość równą zero, jako wartość końcową funkcji $f(t)$, to wynik ten jest nieprawdziwy.

2. WYZNACZANIE ODWROTNEJ TRANSFORMATY LAPLACE'A PRZEZ ROZKŁAD NA UŁAMKI PROSTE

W układach sterowania, dla większości problemów, wyznaczanie odwrotnej transformaty Laplace'a nie odbywa się poprzez zastosowanie całki (4), ale na rozłożeniu funkcji na ułamki proste i zastosowaniu wzorów z tabeli transformat Laplace'a (tabela 2).

2.1. ROZKŁAD NA UŁAMKI PROSTE

Transformata Laplace'a rozwiązująca równanie różniczkowe jest funkcją operatorową względem s, i może to zostać zapisane następująco:

$$G(s)=\frac{L(s)}{M(s)} \tag{5}$$

gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami względem s. Równanie (5) zostało zapisane przy założeniu, że rząd wielomianu $M(s)$ jest większy od rzędu wielomianu $L(s)$. Wielomian mianownika $M(s)$ może być zapisany następująco:

$$M(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\ldots+a_1 s+a_0 \tag{6}$$

gdzie a_0, $a_1,\ldots,a_n$ są współczynnikami rzeczywistymi. Metoda rozkładu na ułamki proste zostanie przedstawiona dla następujących przypadków: gdy bieguny funkcji $G(s)$ są jednokrotne, wielokrotne i zespolone.

2.1.1. Funkcja G(s) ma bieguny jednokrotne

Jeśli wszystkie bieguny funkcji operatorowej $G(s)$ są jednokrotne (pojedyncze) i rzeczywiste, wówczas równanie (4) może zostać zapisane następująco:

$$G(s)=\frac{L(s)}{M(s)}=\frac{L(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} \tag{7}$$

gdzie $s_1 \neq s_2 \neq \Lambda \neq s_n$. Jeśli rząd licznika jest mniejszy od rzędu mianownika, wówczas rozkład funkcji (6) na ułamki zwykłe jest następujący:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \ldots + \frac{K_n}{s-s_n} \tag{8}$$

Są dwa sposoby wyznaczania współczynników K_i (i = 1, 2, ..., n). Pierwszy polega na sprowadzeniu sumy ułamków zwykłych do wspólnego mianownika i porównaniu ze sobą odpowiadających sobie współczynników liczników. Drugi znacznie szybszy, tzw. metodą residuuów, polega na obustronnym pomnożeniu równania (7) przez $(s-s_i)$, podstawieniu za $s = s_i$ i wyznaczenie współczynnika K_i odbywa się następująco:

$$K_i = \left[(s-s_i)\frac{L(s)}{M(s)} \right]\Bigg|_{s=s_i} = \frac{L(s_i)}{(s_i-s_1)(s_i-s_2)\ldots(s_i-s_n)} \tag{9}$$

Jeśli stopień wielomianu licznika <u>nie jest niższy</u> aniżeli stopień wielomianu mianownika, wówczas wielomian licznika musi zostać podzielony przez wielomian mianownika, aż uzyska się stopień wielomianu resztkowego niższy od stopnia mianownika

$$G(s) = \frac{L(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} = \begin{matrix}\text{część}\\ \text{calkowita}\end{matrix} + \frac{\text{wielomian resztowy}}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} \tag{10}$$

Przykład 8

Rozważmy następującą funkcję operatorową

$$G(s) = \frac{-3s^2+4}{s(s+2)(s+3)} \tag{8.1}$$

która może zostać zapisana w postaci następującego rozkładu na ułamki zwykłe

$$G(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} \tag{8.2}$$

Współczynniki K_1, K_2 oraz K_3 mogą zostać wyznaczone dwoma sposobami. Pierwszy polega na sprowadzeniu równania (8.2) do wspólnego mianownika

$$G(s) = \frac{(K_1+K_2+K_3)s^2 + (5K_1+3K_2+2K_3)s + 6K_1}{s(s+2)(s+3)} \tag{8.3}$$

i porównaniu uzyskanych współczynników równania (8.3) ze współczynnikami licznika funkcji (8.1)

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 & = -3 \\ 5K_1 + 3K_2 + 2K_3 & = 0 \\ 6K_1 & = 4 \end{cases} \tag{8.4}$$

Z rozwiązania powstałego układu równań (8.4) uzyskuje się następujące wyniki

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{2}{3} \\ K_2 = 4 \\ K_3 = -\dfrac{23}{3} \end{cases} \tag{8.5}$$

Druga metoda (residuuów) polega na wyznaczaniu współczynników K_1, K_2 i K_3 z następujących zależności:

$$K_1 = \left.\frac{-3s^2+4}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=0} = \frac{2}{3} \tag{8.6}$$

$$K_2 = \left.\frac{-3s^2+4}{s(s+3)}\right|_{s=-2} = 4 \tag{8.7}$$

$$K_3 = \left.\frac{-3s^2+4}{s(s+2)}\right|_{s=-3} = -\frac{23}{3} \tag{8.8}$$

W rezultacie równanie (8.2) jest następujące

$$G(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{s} + 4\frac{1}{s+2} - \frac{23}{3}\frac{1}{s+3} \tag{8.9}$$

Przykład 9

Przykład ilustrujący sposób rozkładu funkcji operatorowej na ułamki zwykłe dl przypadku w którym stopień wielomianu licznika nie jest niższy od stopnia wielomianu mianownika.

$$G(s) = \frac{3s^2-4s+1}{s^2+5s+6} = 3 + \frac{-19s-17}{s^2+5s+6} = 3 + 21\frac{1}{s+2} - 40\frac{1}{s+3} \tag{9.1}$$

2.1.2. Funkcja G(s) ma bieguny wielokrotne

Jeśli wszystkie bieguny funkcji operatorowej $G(s)$ są pojedyncze i rzeczywiste wówczas równanie (5) może to zostać zapisane następująco:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_{n-r})(s-s_i)^r} \tag{11}$$

gdzie $i \neq 1, 2, ..., n-r$. W tym przypadku funkcja operatorowa $G(s)$ może być wyrażona w sposób:

$$G(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \ldots + \frac{K_{n-r}}{s-s_{n-r}} + \frac{A_1}{s-s_i} + \frac{A_2}{(s-s_i)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-s_i)^r} = \tag{12}$$

Współczynniki K_1, $K_2,...,K_{n-r}$ odpowiadają biegunom pojedynczym i mogą zostać wyznaczone według zależności (9). Określenie współczynników, które odpowiadają biegunom wielokrotnym wyznacza się następująco:

$$A_r = \left[(s-s_i)^r G(s)\right]_{s=s_i} \tag{13}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-s_i)^r G(s)\right]_{s=s_i} \tag{14}$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-s_i)^r G(s)\right]_{s=s_i} \tag{15}$$

$$\vdots$$

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[(s-s_i)^r G(s)\right]_{s=s_i} \tag{16}$$

Przykład 10

Rozważ następującą funkcję operatorową

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} \tag{10.1}$$

która ma potrójny biegun w $s=-1$. Rozkład funkcji operatorowej $G(s)$ na ułamki proste odbywa się według zależności (11)

$$G(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3} \tag{10.2}$$

Współczynniki odpowiadające biegunom jednokrotnym

$$K_1 = [sG(s)]_{s=0} = \left.\frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \tag{10.3}$$

$$K_2 = [(s+2)G(s)]_{s=-2} = \left.\frac{1}{s(s+1)^3}\right|_{s=-2} = \frac{1}{2} \tag{10.4}$$

Pozostałe współczynniki bieguna wielokrotnego

$$A_3 = \left[(s+1)^3 G(s)\right]_{s=-1} = -1 \tag{10.5}$$

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 G(s)\right]_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]_{s=-1} = 0 \tag{10.6}$$

$$A_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 G(s)\right]_{s=-1} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]_{s=-1} = -1 \tag{10.7}$$

Uzyskany w ten sposób rozkład funkcji operatorowej (10.1) na ułamki proste

$$G(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3} \tag{10.8}$$

2.1.3. Funkcja G(s) ma bieguny zespolone jednokrotne

Rozkład na ułamki proste według zależności (8) jest również poprawny w przypadku, jeśli wśród biegunów funkcji operatorowej $G(s)$ pojawiają się wartości zespolone jednokrotne.

Przykład 11

Rozważ następującą funkcję ilustrującą rozkład funkcji zawierającej bieguny zespolone jednokrotne

$$G(s) = \frac{-s+8}{s(s^2+2s+10)} = \frac{-s+8}{s(s+1-j3)(s+1+j3)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j3} + \frac{K_3 = K_2^*}{s+1+j3} \tag{11.1}$$

wówczas współczynnik odpowiadający biegunowi rzeczywistemu jednokrotnemu

$$K_1 = [sG(s)]_{s=0} = \left.\frac{-s+8}{s^2+2s+10}\right|_{s=0} = \frac{4}{5} = 0.8 \tag{11.2}$$

Współczynniki odpowiadające biegunom zespolonym jednokrotnym są następujące

$$K_2 = \left[(s+1-j3)G(s)\right]_{s=-1+j3} = \left.\frac{-s+8}{s(s+1+j3)}\right|_{s=-1+j3} = \frac{-4+j3}{10} = \frac{1}{2}e^{j143^o} \quad (11.3)$$

przy czym współczynnik odpowiadający drugiej liczbie zespolonej sprzężonej jest sprzężony do poprzedniego współczynnika i nie ma potrzeby liczenia go

$$K_3 = K_2^* = \frac{-4-j3}{10} = \frac{1}{2}e^{-j143^o} \quad (11.4)$$

podstawiając wartości liczbowe współczynników K_2, K_3 w postaci wykładniczej do zależności (11.1) otrzymuje się

$$G(s) = \frac{4}{5}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{e^{j143^o}}{s+1-j3} + \frac{1}{2}\frac{e^{-j143^o}}{s+1+j3} \quad (11.5)$$

korzystając z tabeli 2, odpowiadająca funkcja czasowa jest następująca

$$g(t) = \frac{4}{5} + e^{-t}\cos\left(3t+143^o\right) \qquad t \ge 0 \quad (11.6)$$

Inną postać rozwiązania uzyskuje się po podstawieniu do równania (11.1) wartości liczbowych współczynników K_2, K_3 w postaci algebraicznej, wówczas otrzymuje się

$$G(s) = \frac{4}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\frac{4-j3}{s+1-j3} - \frac{1}{10}\frac{4+j3}{s+1+j3} \quad (11.7)$$

korzystając z tabeli 2, uzyskana funkcja czasowa jest następująca

$$g(t) == \frac{4}{5} - \frac{4-j3}{10}e^{-(1-j3)t} - \frac{4+j3}{10}e^{-(1+j3)t} \qquad t \ge 0 \quad (11.8)$$

po wykonaniu odpowiednich działań i zastosowaniu wzorów Eulera otrzymuje się

$$g(t) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\left(4\cos 3t + 3\sin 3t\right)...t \ge 0 \quad (11.9)$$

Inny sposób rozwiązania równania (11.1) zawierającego bieguny zespolone sprzężone

$$G(s) = \frac{-s+8}{s\left(s^2+2s+10\right)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+10} \quad (11.10)$$

gdzie K_1, K_2 oraz K_3 są wyznaczane z porównania współczynników następującej zależności

$$-s+8 = (K_1+K_2)s^2 + (2K_1+K_3)s + 10K_1 \quad (11.11)$$

uzyskane w ten sposób wartości współczynników

$$K_1 = \frac{4}{5},\ K_2 = -\frac{4}{5} \ \text{ oraz } \ K_3 = -\frac{13}{5} \quad (11.12)$$

Po podstawieniu wyznaczonych współczynników (11.12) do równania (11.10)

$$G(s) = \frac{4}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{4s+13}{s^2+2s+10} = \frac{4}{5}\frac{1}{s} - \frac{4}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} - \frac{3}{5}\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \quad (11.13)$$

korzystając z tabeli 2, uzyskana funkcja czasowa jest następująca

$$g(t) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}e^{-t}\left(4\cos 3t + 3\sin 3t\right)...t \ge 0 \quad (11.14)$$

2.2. ROZKŁAD NA UŁAMKI PROSTE Z ZASTOSOWANIEM FUNKCJI MATLABA

Rozkład na ułamki proste funkcji operatorowej może zostać wykonany przy użyciu programów komputerowych. Dla przykładu może zostać zastosowana funkcja *residue* z biblioteki MATLABA. Rozważmy następującą funkcję operatorową $G(s) = L(s)/M(s)$:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{\textbf{num}}{\textbf{den}} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{17}$$

w której niektóre współczynniki a_i oraz b_j mogą być równe zero. W MATLABIE wektory num i den określają współczynniki licznika i mianownika transmitancji.

```
num = [bm bm-1 ... b1 b0]
den = [an an-1 ... a1 a0]
```

polecenie

```
[r, p, k] = residue( num, den)
```

wyznacza residua (r), bieguny (p) oraz część całkowitą (k) rozkładu na ułamki proste ilorazu dwóch wielomianów $L(s)$ i $M(s)$.

Przykład 12

Rozważona zostanie następująca funkcja operatorowa

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \tag{12.1}$$

Dla tej funkcji operatorowej zapis w MATLABIE jest następujący

```
>> num = [2 5 3 6]
>> den = [1 6 11 6]
```

zastosowanie polecenia

```
>> [r, p, k] = residue( num, den)
```

daje następujące wyniki

```
r =
   -6.0000
   -4.0000
    3.0000

p =
   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000

k =
     4
```

(Zauważ, że residua zwracane są w wektorze kolumnowym r, położenia biegunów w wektorze kolumnowym p, a część całkowita w wektorze wierszowym k). Ten powyższy zapis w MATLABIE odpowiada następującemu rozkładowi na ułamki proste funkcji operatorowej G(s)= L(s)/M(s):

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2 \tag{12.2}$$

Polecenie *residue* może być również używane do przekształcenia funkcji operatorowej rozłożonej na ułamki proste na postać ilorazu dwóch wielomianów (licznika i mianownika). Polecenie to jest następujące:

```
>> [num, den] = residue(r, p, k)
```

gdzie wektory r, p, k mają wartości uzyskane z powyższego rozkładu. Polecenie

```
>> printsys(num, den, 's')
```

wypisuje iloraz wielomianów w zależności od zmiennej s.

```
num/den =

   2 s^3 + 5 s^2 + 3 s + 6
   -----------------------
    s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6
```

---

3. ZASTOSOWANIE TRANSFORMATY LAPLACE'A DO ROZWIĄZYWANIA LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Liniowe równania różniczkowe zwyczajne mogą być rozwiązywane przez zastosowanie metody transformaty operatorowej Laplace'a przy pomocy twierdzeń zawartych w rozdziale 1, rozkładowi na ułamki proste i tablicy transformat Laplace'a. Procedura ta może zostać podzielona na następujące etapy:

1. Transformowanie równania różniczkowego w dziedzinę s przez transformatę Laplace'a przy użyciu tablicy transformat.
2. Przekształcanie transformowanego równania algebraicznego i rozwiązywanie dla zmiennej wyjściowej.
3. Wykonywanie rozkładu transformowanego równania algebraicznego na ułamki proste.
4. Uzyskiwanie odwrotnej transformaty Laplace'a z tablicy transformat.

Metoda ta zilustrowana zostanie następującym przykładem.

Przykład 13

Rozważ następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5 \cdot 1(t) \tag{13.1}$$

gdzie $1(t)$ jest jednostkową funkcją skokową. Warunki początkowe są następujące: $y(0) = -1$, $y^{(1)}(0) = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2$. Aby rozwiązać równanie różniczkowe, najpierw należy transformować obustronnie równanie (13.1) przy użyciu transformaty Laplace'a

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5\frac{1}{s} \tag{13.2}$$

Podstawiając wartości liczbowe warunków początkowych do równania (13.2) i wyznaczając $Y(s)$, otrzymuje się

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} \tag{13.3}$$

Równanie (8.3) jest rozkładane na ułamki proste i uzyskuje się

$$Y(s)=\frac{5}{2}\frac{1}{s}-\frac{5}{s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s+2} \tag{13.4}$$

Stosując odwrotną transformatę Laplace'a do równania (13.4) otrzymuje się ostateczne rozwiązanie

$$y(t)=\frac{5}{2}-5e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t} \tag{13.5}$$

W uzyskanym rozwiązaniu (13.5), pierwszy składnik reprezentuje rozwiązanie w stanie ustalonym, natomiast dwa ostatnie w stanie przejściowym. W przeciwieństwie do metody klasycznej, w której rozwiązanie uzyskuje się w dwóch krokach, oddzielnie dla rozwiązania ustalonego i przejściowego, metoda transformaty Laplace'a daje całe rozwiązanie w jednej operacji.

Jeśli interesuje nas tylko rozwiązanie w stanie ustalonym, wówczas może być zastosowane twierdzenie o wartości końcowej (2.2), wówczas

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{-s^2-s+5}{s^2+3s+2}=\frac{5}{2} \tag{13.6}$$

gdzie najpierw sprawdza się czy funkcja $sY(s)$ ma bieguny tylko w lewej półpłaszczyźnie, tak aby twierdzenie o wartości końcowej dawało poprawne wyniki.

ZAGADNIENIA KONTROLNE

1. Zapisz równanie definiujące jednostronną transformatę Laplace'a.
2. Zapisz równanie definiujące odwrotną transformatę Laplace'a.
3. Zapisz wyrażenie opisujące twierdzenie o wartości końcowej transformaty Laplace'a. Jakie warunki muszą być spełnione, aby twierdzenie to było prawdziwe ?
4. Podaj transformatę Laplace'a jednostkowej funkcji skokowej $1(t)$.
5. Jaka jest transformata Laplace'a funkcji jednostkowej liniowo narastającej w czasie $t1(t)$?
6. Podaj transformatę Laplace'a funkcji czasowej $f(t)$ przesuniętej w prawo (opóźnionej) o T_o.
7. Jeśli $\mathcal{L}\{f_1(t)\}=F_1(s)$ oraz $\mathcal{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$, wyznacz $\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\}$ w zależności od $F_1(s)$ oraz $F_2(s)$.
8. Czy wiesz jak rozłożyć na ułamki proste funkcję operatorową zawierającą element wykładniczy

$$F(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}e^{-2s}$$

9. Czy wiesz jak rozłożyć na ułamki proste funkcję której rząd mianownika nie jest większy od rzędu licznika, dla przykładu

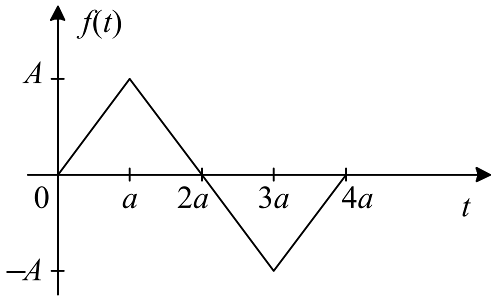
$$F(s)=\frac{10\left(s^2+5s+1\right)}{(s+1)(s+2)}$$

10. Próbując znaleźć odwrotną transformatę Laplace'a następującej funkcji, czy umiałbyś wykonać rozkład na ułamki proste

$$F(s)=\frac{1}{(s+5)^3}$$

ĆWICZENIA

C1. Wyznacz transformatę Laplace'a $F(s)$ funkcji pokazanej na rysunku 2



Rys.2. Funkcja $f(t)$

Rozwiązanie: funkcja $f(t)$ może zostać zapisana następująco:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{A}{a}t & 0 \le t < a \\ 2A - \frac{A}{a}t & a \le t < 3a \\ \frac{A}{a}t - 4A & 3a \le t < 4a \\ 0 & t \ge 4a \end{cases} \tag{c1.1}$$

Transformata Laplace'a funkcji (c1.1)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{4a} f(t)e^{-st}dt \tag{c1.2}$$

Dalszy ciąg obliczeń zależności (c1.2)

$$F(s) = \int_0^a \frac{A}{a}te^{-st}dt + \int_a^{3a}\left(2A - \frac{A}{a}t\right)e^{-st}dt + \int_{3a}^{4a}\left(\frac{A}{a}t - 4A\right)e^{-st}dt \tag{c1.3}$$

Teraz każda całka zostanie rozwiązana oddzielnie

$$\int_0^a \frac{A}{a}te^{-st}dt = \frac{A}{a}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^a - \int_0^a\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt\right] = -\frac{A}{s}e^{-as} + \frac{A}{a}\left(\frac{1-e^{-as}}{s^2}\right) \tag{c1.4}$$

$$\int_a^{3a}\left(2A - \frac{A}{a}t\right)e^{-st}dt = \frac{A}{s}\left(e^{-as} + e^{-3as}\right) + \frac{A}{a}\left(\frac{e^{-3as} - e^{-as}}{s^2}\right) \tag{c1.5}$$

$$\int_{3a}^{4a}\left(\frac{A}{a}t - 4A\right)e^{-st}dt = -\frac{A}{s}e^{-3as} + \frac{A}{a}\left(\frac{e^{-3as} - e^{-4as}}{s^2}\right) \tag{c1.6}$$

Po zsumowaniu wyznaczonych całek składowych (c1.4), (c1.5) oraz (c1.6) otrzymuje się transformatę funkcji z rysunku 2.

$$F(s) = \frac{A}{a}\left(\frac{1 - 2e^{-as} + 2e^{-3as} - e^{-4as}}{s^2}\right) \tag{c1.7}$$

C2. Znajdź zera i bieguny następujących funkcji operatorowych Zaznacz na płaszczyźnie s skończone bieguny za pomocą ×, a skończone zera za pomocą O

a) $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s^2(s+1)(s+10)}$

b) $G(s) = \dfrac{10s(s+1)}{(s+2)(s^2+3s+2)}$

c) $G(s) = \dfrac{10(s+2)}{s(s^2+2s+2)}$

d) $G(s) = \dfrac{1}{1-e^{-s}}$

e) $G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{10s(s+1)(s+2)}$

C3. Znajdź transformaty Laplace'a następujących funkcji. Zastosuj, jeśli to możliwe twierdzenia o własnościach transformaty Laplace'a

a) $g(t) = 5te^{-5t} \cdot 1(t)$

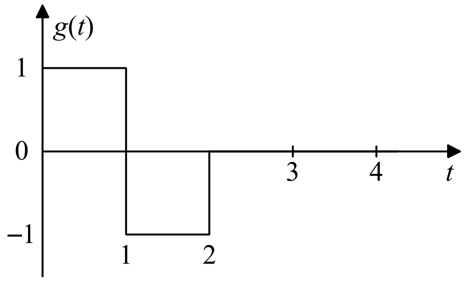
b) $g(t) = \left(t\sin 2t + e^{-2t}\right)\cdot 1(t)$

c) $g(t) = 2e^{-2t}\sin 2t \cdot 1(t)$

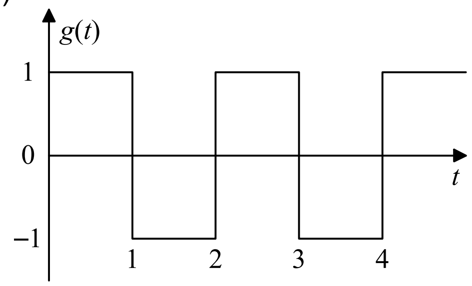
d) $g(t) = \sin 2t \cos 2t \cdot 1(t)$

C4. Znajdź transformaty Laplace'a następujących funkcji. Najpierw zapisz kompletne wyrażenia dla $g(t)$, a następnie dokonaj transformowania. Wykonaj transformatę Laplace'a na funkcji $g(t)$, aby otrzymać $G(s)$.

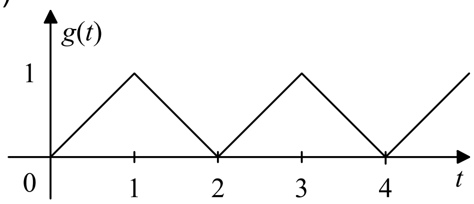
a)



b)



c)



C5. Znajdź transformatę Laplace'a następującej funkcji:

$$g(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \\ 2-t & 2 \le t < 3 \\ 0 & t \ge 3 \end{cases}$$

C6. Dla poniższych transformowanych sygnałów, znajdź $y(t)$ dla $t \ge 0$

a) $Y(s) = \dfrac{s}{s+2}$

b) $Y(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+3s+2}$

c) $Y(s) = \dfrac{3-6e^{-2s}}{s^2+5s+6}$

d) $Y(s) = \dfrac{4(s+1)}{(s+2)(s+3)^2}$

e) $Y(s) = \dfrac{10}{s^3+2s^2+5s}$

C7. Znajdź odwrotne transformaty Laplace'a następujących funkcji. Najpierw dokonaj rozkładu na ułamki proste funkcji operatorowych $G(s)$, a następnie skorzystaj z tablicy transformat.

a) $Y(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

b) $Y(s) = \dfrac{10}{(s+1)^2(s+3)}$

c) $Y(s) = \dfrac{100(s+2)}{s(s^2+4)(s+1)}e^{-s}$

d) $Y(s) = \dfrac{2(s+1)}{s(s^2+s+2)}$

e) $Y(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$

f) $Y(s) = \dfrac{2(s^2+s+1)}{s(s+1)(s^2+5s+5)}$

C8. Korzystając z metod transformaty Laplace'a, rozwiąż następujące równania różniczkowe dla $t \geq 0$, zakładając zerowe warunki początkowe.

a) $\dfrac{dy}{dt} + 7y = 5\cos 2t$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = 5\sin 3t$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 25y = 10 \cdot 1(t)$

d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 10y = e^{-t}$

C9. Korzystając z metod transformaty Laplace'a rozwiąż następujące równania różniczkowe dla $t \geq 0$ z uwzględnieniem warunków początkowych

a) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 6e^{2t}$

$y(0) = 3$

b) $\dfrac{dy}{dt} + y = 3\cos 2t$

$y(0) = 0$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 7\dfrac{dy}{dt} + 12y = 10$

$y(0) = 3$

$y^{(1)}(0) = 0$

d) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} = 0$

$y(0) = 3$

$y^{(1)}(0) = -2$

$y^{(2)}(0) = 7$

e) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + y = 0$

$y(0) = 1$

$y^{(1)}(0) = -2$

$y^{(2)}(0) = 5$

f) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 20y = 4$

$y(0) = -2$

$y^{(1)}(0^-) = 0$

ĆWICZENIA W MATLABIE

M1. Korzystając z oprogramowania narzędziowego MATLAB, dokonaj rozkładu na ułamki proste następujących funkcji operatorowych

a) $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{s^2(s+4)(s+6)}$

b) $G(s) = \dfrac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+5)}$

c) $G(s) = \dfrac{100(s^2+s+3)}{s(s^2+5s+3)}$

d) $G(s) = \dfrac{s+1}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$

e) $G(s) = \dfrac{5e^{-2s}}{(s+1)(s^2+s+1)}$

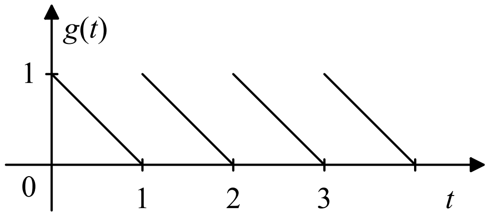
f) $G(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)(s+0.5)^2}$

M2. Znajdź odwrotne transformaty Laplace'a dla funkcji operatorowych z zadania M1 i narysuj je w MATLABIE.

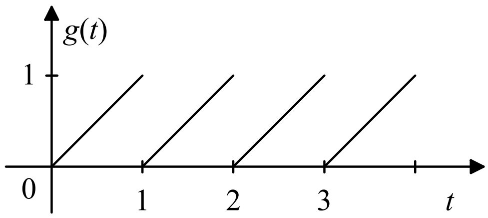
ZADANIA

Z.1. Znajdź transformaty Laplace'a następujących funkcji

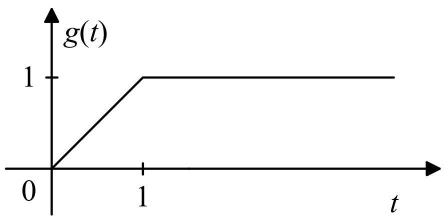
a)



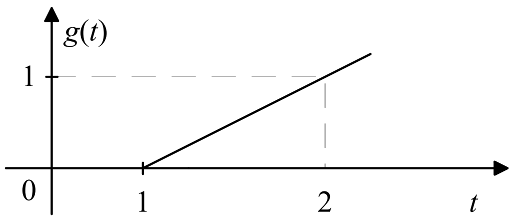
b)



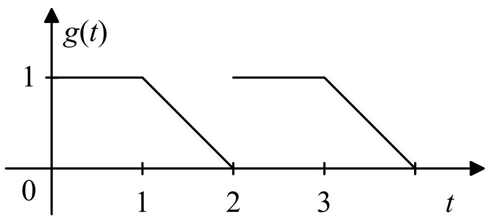
c)



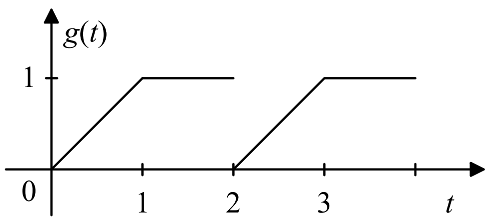
d)



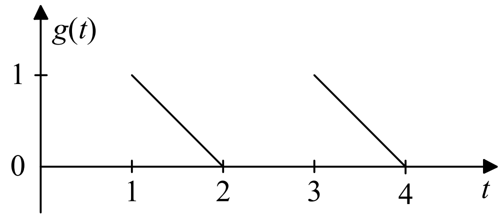
e)



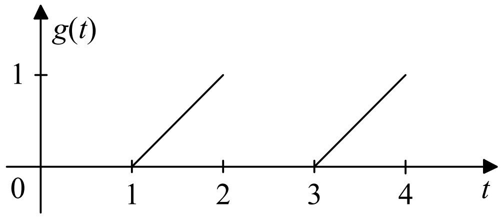
f)



g)



h)



Z.2. Korzystając z metod transformaty Laplace'a rozwiąż następujące równania różniczkowe dla $t \geq 0$ z uwzględnieniem warunków początkowych:

a) $\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\cos t$

$y(0) = -3$

b) $\dfrac{d^3 y(t)}{dt^3} + 5\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\dfrac{dy(t)}{dt} = 3\,\delta(t)$

$y(0) = 2$

$y^{(1)}(0) = -3$

$y^{(2)}(0^-) = 3$

c) $\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2t^2$

$y(0) = -3$

d) $\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = \sin 4t$

$y(0) = -3$

e) $\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + 17\,y(t) = 4 \cdot 1(t)$

$y(0) = 10$

$y^{(1)}(0) = -2$

f) $\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dy(t)}{dt} + 3\,y(t) = e^{-5t}$

$y(0) = 1$

$y^{(1)}(0) = -2$

Z.3. Korzystając z metod transformaty Laplace'a rozwiąż następujące równania różniczkowe dla $t \geq 0$ z uwzględnieniem warunków początkowych:

a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin 2t$

$y(0) = 2$

$y^{(1)}(0) = -3$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = 5\,e^{-2t} + t$

$y(0) = 2$

$y^{(1)}(0) = 1$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = t^2$

$y(0) = 1$

$y^{(1)}(0) = 2$

d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 6y = e^{-2t}\sin 3t$

$y(0) = 0$

$y^{(1)}(0) = 3$

Uwaga: Do rozwiązywania powyższych zadań może być przydatna znajomość wzorów Eulera:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ĆWICZEŃ

C2.

a) bieguny: $s = 0, 0, -1, -10$; zero: $s = -2$.
b) bieguny: $s = -1, -2, -2$; zera: $s = 0, -1$.
c) bieguny: $s = 0, -1, -1+j; -1-j$; zero: $s = -2$.
d) bieguny: $s = \pm j2k\pi$ $(k = 1, 2, ...)$
e) bieguny: $s = 0, -1, -2$; zera: ∞

C3.

a) $G(s) = \dfrac{5}{(s+5)^2}$

b) $G(s) = \dfrac{4s}{(s^2+4)^2} + \dfrac{1}{s+2}$

c) $G(s) = \dfrac{2}{(s+2)^2 + 4}$

d) $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 16}$

C4.

a) $G(s) = \dfrac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} = \dfrac{(1-e^{-s})^2}{s}$

b) $G(s) = \dfrac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-2s})} = \dfrac{(1-e^{-s})}{s(1+e^{-s})}$

c) $G(s) = \dfrac{(1-e^{-s})^2}{s^2(1-e^{-2s})} = \dfrac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$

C5.

$$G(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-3s}}{s} + \frac{1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}}{s^2}$$

C6.

a) $y(t) = \delta(t) - 2\,e^{-2t}$

b) $y(t) = -e^{-t} + 3\,e^{-2t}$

c) $y(t) = 3\,e^{-2t} - 3\,e^{-3t}$
$\quad -[6\,e^{-2(t-2)} - 6\,e^{-3(t-2)}]\cdot 1(t-2)$

d) $y(t) = -4\,e^{-2t} + 4\,e^{-3t} + 8\,te^{-3t}$

e) $y(t) = 2 + \sqrt{5}e^{-t}\cos(2t + 153^{\circ})$
$\quad = 2 - e^{-t}(2\cos 2t + \sin 2t)$

C7.

a) $y(t) = \dfrac{1}{2} - e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{-2t}$

b) $y(t) = \dfrac{5}{2}e^{-3t} - \dfrac{5}{2}e^{-t} + 5te^{-t}$

c) $y(t) = 20e^{-t} + 10\sqrt{5}\cos(2t + 206^{\circ})$
$\quad + [50 - 40e^{-(t-1)}]\cdot 1(t-1)$
$\quad + [10\sqrt{5}\cos(2(t-1) + 206^{\circ})]\cdot 1(t-1)$

d) $y(t) = 1 + \frac{4\sqrt{7}}{7} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t + 228.6^{o}\right)$

$= 1 + e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2} t + \frac{3\sqrt{7}}{7} \sin\frac{\sqrt{7}}{2} t\right)$

e) $y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$

f) $y(t) = 0.4 - 2e^{-t} + 2.6e^{-1.38t} - e^{-3.62t}$

C8.

a) $y(t) = -\frac{35}{53} e^{-7t} + \frac{5}{\sqrt{53}} \cos\left(2t + 344^{o}\right)$

$= -\frac{35}{53} e^{-7t} + \frac{35}{53} \cos 2t + \frac{10}{53} \sin 2t$

b) $y(t) = \frac{15}{26} e^{-2t} - \frac{3}{10} e^{-4t}$

$+ \frac{\sqrt{13}}{13} \cdot \cos\left(3t + 176.8^{o}\right)$

$= \frac{15}{26} e^{-2t} - \frac{3}{10} e^{-4t}$

$- \frac{1}{65}\left(18\cos 3t + \sin 35\right)$

c) $y(t) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} e^{-4t} \cos\left(3t + 126.7^{o}\right)$

$= \frac{2}{5} - \frac{1}{15} e^{-4t}\left(6\cos 4t + 8\sin 4t\right)$

d) $y(t) = \frac{1}{9} e^{-t} - \frac{1}{9} e^{-t} \cos\left(3t + 180^{o}\right)$

$= \frac{1}{9} e^{-t} - \frac{1}{9} e^{-t}\left(\cos 3t\right)$

C9.

a) $y(t) = e^{2t} + 2\,e^{-4t}$

b) $y(t) = -\frac{3}{5} e^{-t} + \frac{3\sqrt{5}}{5} \cos\left(2t + 297^{o}\right)$

$= -\frac{3}{5} e^{-t} + \frac{3}{5} \cos 2t + \frac{6}{5} \sin 2t$

c) $y(t) = \frac{5}{6} - \frac{13}{2} e^{-4t} + \frac{26}{3} e^{-3t}$

d) $y(t) = \frac{5}{2} + e^{-3t} - \frac{1}{2} e^{-2t}$

e) $y(t) = e^{-t} - t\,e^{-t} + t^2 e^{-t}$

f) $y(t) = \frac{1}{5} + \frac{11}{2\sqrt{5}} e^{-2t} \cos\left(4t + 153^{o}\right)$

$= \frac{1}{5} - e^{-2t}\left(\frac{11}{5}\cos 4t + \frac{11}{10}\sin 4t\right)$

Z1.

a) $G(s) = \frac{e^{-s} + s - 1}{s^2\left(1 - e^{-s}\right)}$

b) $G(s) = \frac{1 - se^{-s} - e^{-s}}{s^2\left(1 - e^{-s}\right)}$

c) $G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2}$

e) $G(s) = \frac{s + e^{-2s} - e^{-s}}{s^2\left(1 - e^{-2s}\right)}$

f) $G(s) = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2\left(1 - e^{-2s}\right)}$

Z2.

a) $Y(s) = \frac{-3s^2 + 2s - 3}{(s+1)\left(s^2 + 1\right)}$

$y(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + 315^{o}\right) - 4\,e^{-t}$

b) $Y(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s\left(s^2 + 5s + 6\right)}$

$y(t) = 1.5\,e^{-2t} + 0.5 \cdot 1(t)$

e) $Y(s) = \frac{10s^2 + 18s + 4}{s\left(s^2 + 2s + 17\right)}$

$y(t) = 9.9558 \cdot e^{-t} \cos\left(4t - 11.24^{o}\right) + 0.2353 \cdot 1(t)$

LITERATURA

1. Amborski K., *Teoria sterowania. Podręcznik programowany*. PWN, Warszawa, 1985.
2. Dorf R.C., R.H. Bishop, *Modern Control Systems*, Addison–Wesley Longman, Inc., 1998.
3. Hostetter G.H., C.J. Savant, R.T. Stefani, *Design of Feedback Control Systems*, Saunders College Publishing, 1989.
4. Kaczorek T., *Teoria sterowania,* PWN, Warszawa, 1974.
5. Nise N. S. *Control Systems Engineering*, 3rd edn, John Wiley & Sons, 2000.
6. Próchnicki W., M. Dzida, *Zbiór zadań z podstaw automatyki*, Gdańsk, 1993.