Przekształcenie zet (Z)

Definicja przekształcenia Z

Przekształcenie zet jest w dziedzinie czasu dyskretnego odpowiednikiem ciągłego przekształcenia Laplace'a w dziedzinie czasu ciągłego. Podamy dwie równoważne definicje przekształcenia zet różniące się jedynie sposobem zapisu matematycznego sygnału dyskretnego:

- Dla sygnału zapisanego w postaci ciągu wartości $f[n]$:

$$F(z) \overset{definicja}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

- Dla sygnału spróbkowanego $f^*(t)$ (wykorzystując przekształcenie Laplace'a)

$$F(z) \overset{definicja}{=} L\{f^*(t)\}\Big|_{e^{sT_p}=z}$$

Sygnał dyskretny

$$f^*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT_p) \cdot \delta(t - nT_p)$$

Transformata Laplace'a (dwustronna) sygnału dyskretnego:

$$F_{II}^*(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT_p) \cdot e^{-nsT_p}\Big|_{e^{sT_p}=z}$$

Stąd po dokonaniu podstawienia zgodnie z definicją otrzymamy wyrażenie jak dla ciągu

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(nT_p\right) \cdot z^{-n}$$

Obszar zbieżności

Ponieważ przekształcenie **Z** ciągu $f[n]$ jest zdefiniowane jako szereg nieskończony, zatem istnieje tylko dla tych wartości dla których szereg jest zbieżny.

Suma zawiera zarówno dodatnie jak i ujemne potęgi zmiennej z. Jak wiadomo z teorii szeregów potęgowych suma ujemnych potęg jest zbieżna dla $|z|$ większego niż pewna stała r_1, a suma potęg dodatnich jest zbieżna dla $|z|$ mniejszego niż pewna stała r_2.

Wynika stąd, że obszar zbieżności (istnienia) transformaty **Z** ma kształt pierścienia o promieniach r_1, r_2 zależnych od funkcji $f[n]$.

W celu dokładniejszego wyjaśnienia tego zagadnienia wykorzystamy przekształcenie Laplace'a. Rozpatrzymy odwzorowanie punktów płaszczyzny zmiennej zespolonej s na punkty płaszczyzny zmiennej zespolonej z.

Zgodnie z definicją przekształcenia **Z** związek między zmienną z i s opisuje równanie:

$$z = e^{sT_p}$$

Ponieważ

$$s = \sigma + j\omega$$

Stąd

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T_p} = e^{\sigma T_p} e^{j\omega T_p}$$

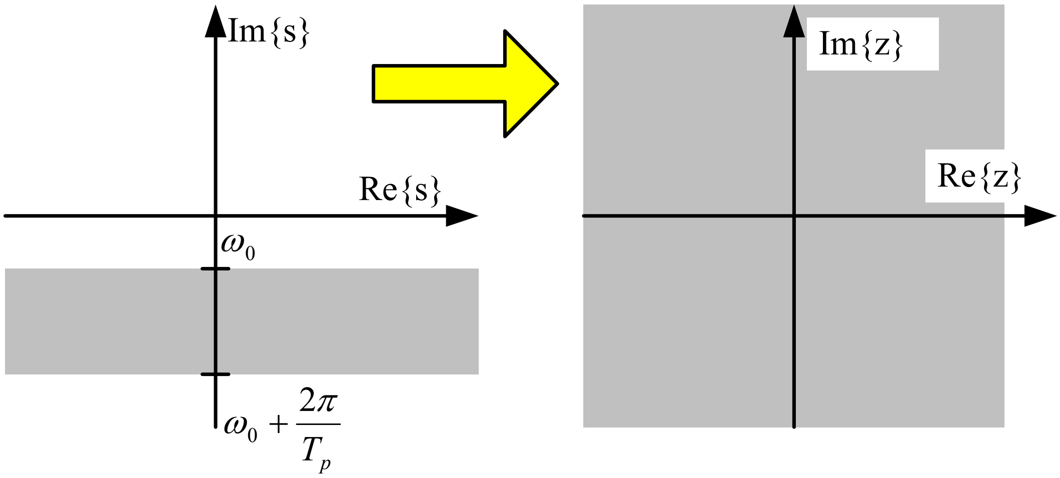
Czynnik $e^{j\omega T_p}$ jest okresowy, zatem odwzorowanie nie jest jednoznaczne.

$$z = e^{\sigma T_p} e^{j\omega T_p} = e^{\sigma T_p} e^{j\left(\omega T_p + 2\pi\right)}$$

Oznacza to, że każdy dowolny pas na płaszczyźnie zmiennej *s* określony następująco

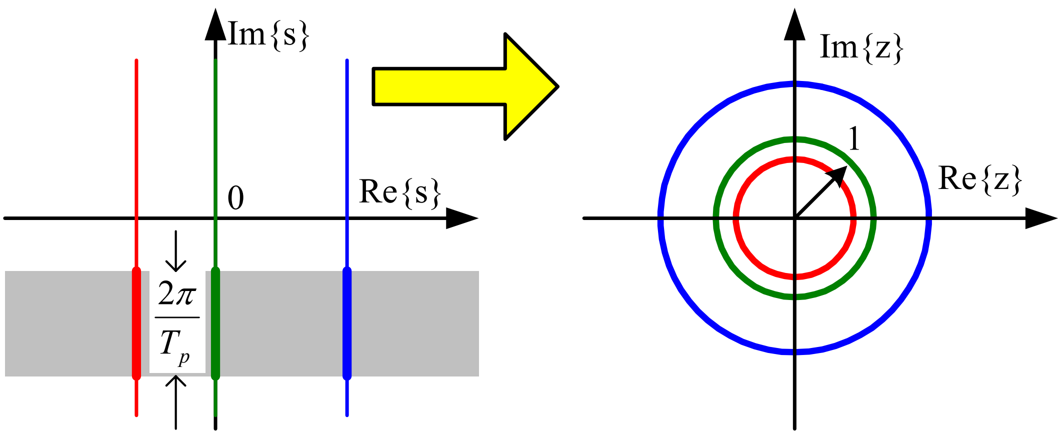
$$\omega_0 < \omega < \omega_0 + \frac{2\pi}{T_p} \qquad -\infty < \sigma < \infty$$

odwzorowuje całą płaszczyznę zmiennej *z*.

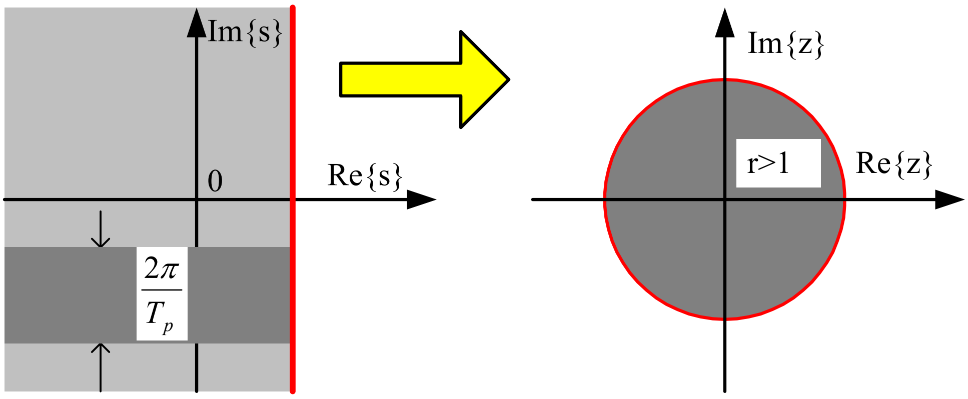


Rozpatrzymy szczególne przypadki odwzorowań:

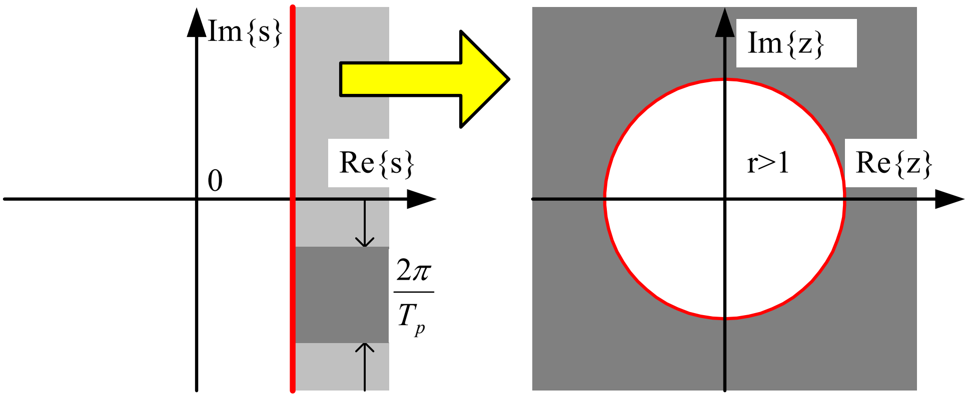
Obrazem prostej o równaniu *s*=*a* (pionowa) na płaszczyźnie *s* będzie okrąg o promieniu e^{aT_p} na płaszczyźnie zmiennej *z*. Oś urojonych ma płaszczyźnie *s* odwzorowuje się na okrąg jednostkowy na płaszczyźnie *z*.



Półpłaszczyzna na lewo od prostej $s=a$ na płaszczyźnie s będzie wnętrzem koła o promieniu e^{aT_p}



Półpłaszczyzna na prawo od prostej $s=a$ na płaszczyźnie s będzie zewnętrzem koła o promieniu e^{aT_p}



Rozpatrzymy przykład, który do wyznaczania przekształcenia **Z** wykorzystuje analogie z transformacją Laplace'a

Obliczymy dwustronną transformatę Laplace'a sygnału o ciągłym czasie:

$$x(t) = e^{at}1(-t) + e^{-bt}1(t)$$

$$x(t) = x_-(t) + x_+(t)$$

$$X_{-}(s) = L\{x(-t)\}_{s=-s}$$

$$X_{-}(s) = \frac{1}{-s+a}$$

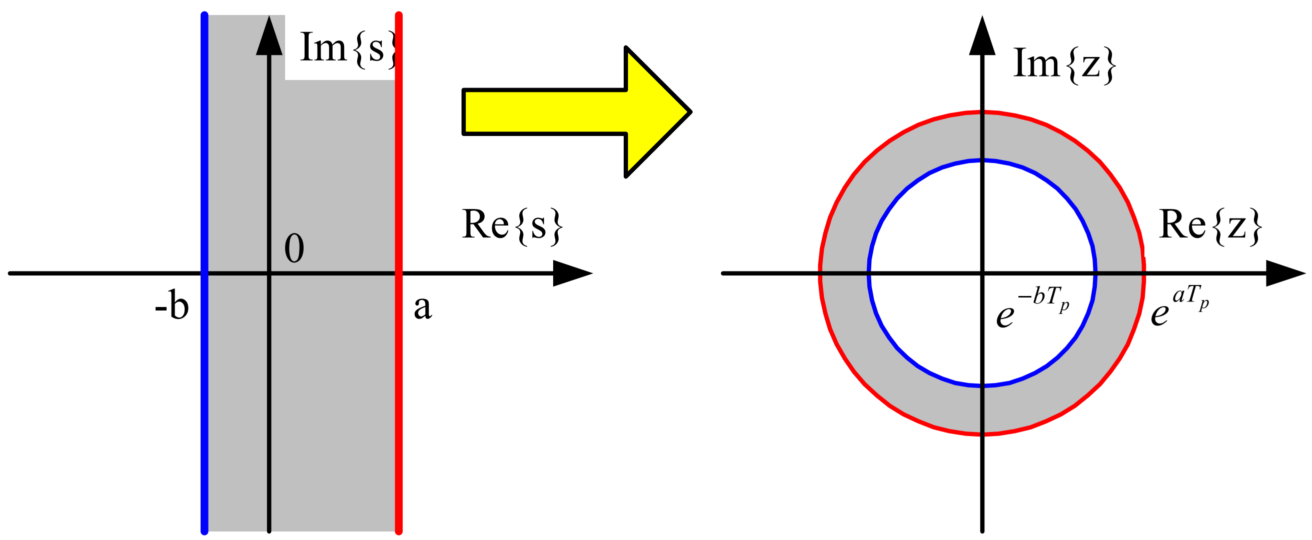
Obszar zbieżności dla tego składnika leży na lewo od punktu a na płaszczyźnie s, czyli wewnątrz okręgu o promieniu $e^{aT_p} > 1$

$$X_{+}(s) = L\{x(t)\}$$

$$X_{+}(s) = \frac{1}{s+b}$$

Obszar zbieżności dla tego składnika leży na prawo od punktu $-b$ na płaszczyźnie s, czyli na zewnątrz koła o promieniu $e^{-bT_p} < 1$

$$X(s) = \frac{1}{-s+a} + \frac{1}{s+b}$$

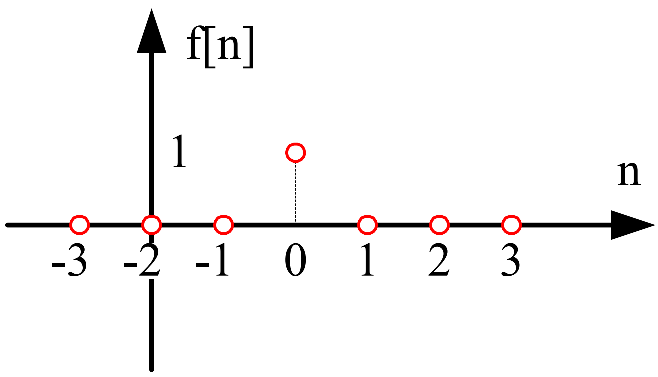


S	Z
Pas zbieżności pomiędzy $-b$ i a	pierścień o promieniach e^{-bT_p}, e^{aT_p}

Przykłady wyznaczania transformaty Z podstawowych sygnałów:

Transformata „zet" (**Z**) delty Kroneckera:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \quad dla \quad n = 0 \\ 0 \quad dla \quad n \neq 0 \end{cases}$$

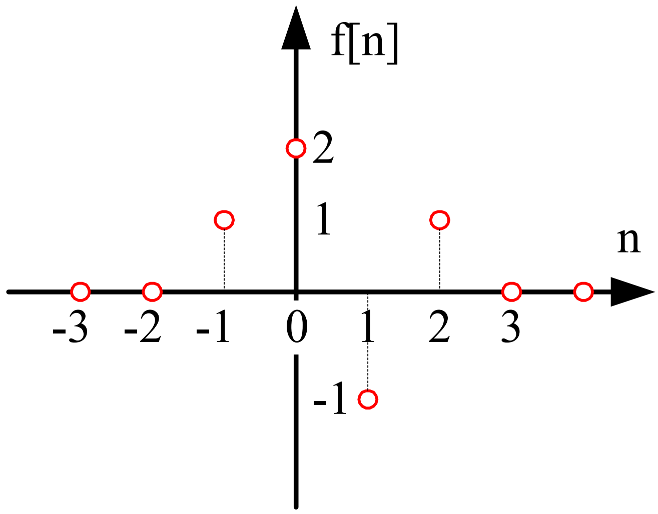


$$\mathsf{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{0} f[n] z^{-n} = z^0 = 1$$

$$\delta[n] \xrightarrow{\mathsf{Z}} 1$$

Transformata **Z** dowolnego ciągu skończonego:

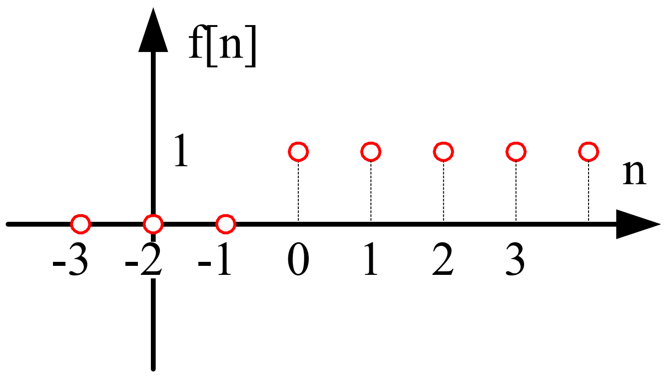
$$x[n]=\begin{cases}1, & n=-1\\ 2, & n=0\\ -1, & n=1\\ 1, & n=2\\ 0, & inne\end{cases}$$



$$\mathcal{Z}\{f[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}=z+2-z^{-1}+z^{-2}$$

Transformata **Z** skoku jednostkowego:

$$1[n]=\begin{cases}1 & dla\ \ n\geq 0\\ 0 & dla\ \ n<0\end{cases}$$



$$\mathsf{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n}$$

Wykorzystamy zależność na sumę ciągu geometrycznego:

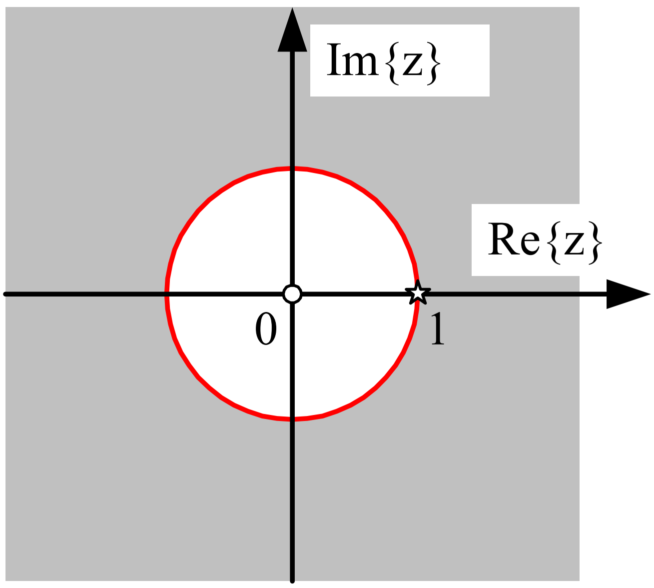
$$A + Ax + \ldots + Ax^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} Ax^{n} = \frac{A - Ax^{n}}{1 - x}$$

$$|x| < 1 \;\; oraz \;\; N \to \infty \Rightarrow x^{N} \to 0$$

$$\mathsf{Z}\{f[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$1[n] \xrightarrow{\mathsf{Z}} \frac{z}{z - 1}$$

Transformata $F(z)$ posiada biegun w punkcie $z=1$, oraz pierwiastek w punkcie $z=0$. Obszar zbieżności opisuje zależność $|z| > |1|$, leży na zewnątrz okręgu o promieniu 1.



Transformata **z** funkcji wykładniczej ($n \geq 0$):

$$x[n] = a^n \cdot 1[n]$$

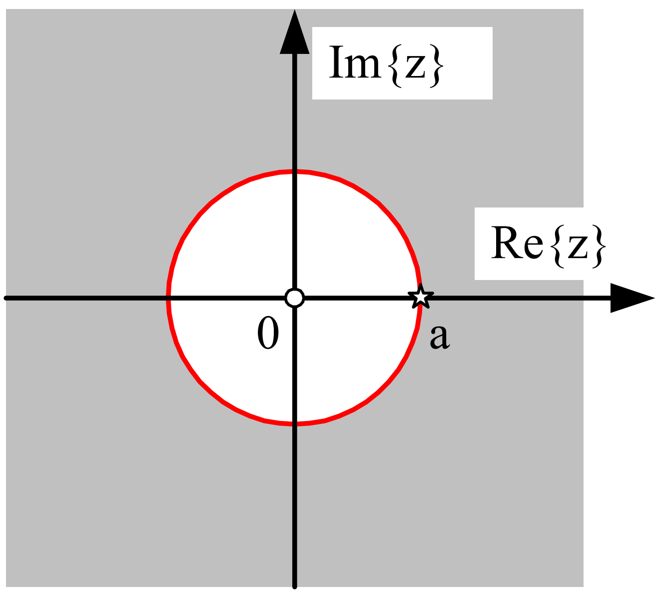
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

Suma jest zbieżna gdy $|a/z|<1$ lub $|z|>|a|$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$a^n 1[n] \xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}$$

Transformata $X(z)$ posiada biegun w punkcie $z=a$, oraz pierwiastek w punkcie $z=0$. Obszar zbieżności opisuje zależność $|z| > |a|$, leży na zewnątrz okręgu o promieniu a.



Transformata **z** funkcji wykładniczej ($n<0$):

$$y[n] = -a^n \cdot 1[-n-1]$$

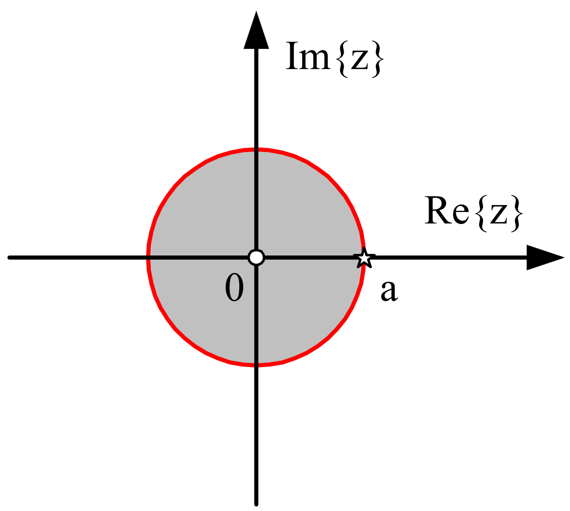
$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(az^{-1}\right)^n \\ &= 1-\sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}z\right)^n \end{aligned}$$

Suma jest zbieżna gdy $|z/a|<1$ lub $|z|<|a|$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-za^{-1}} = \frac{1-za^{-1}-1}{1-za^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$-a^n 1[-n-1] \xrightarrow{\ z\ } \frac{z}{z-a}$$

Transformata $X(z)$ posiada biegun w punkcie $z=a$, oraz pierwiastek w punkcie $z=0$. Obszar zbieżności opisuje zależność $|z| < |a|$, leży na ***wewnątrz*** okręgu o promieniu a.



Przykład

Zidentyfikujemy obszary istnienia transformaty **z** dla następujących sygnałów:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1[-n] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 1[n]$$

$$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1[n] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 1[n]$$

$$w[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1[-n] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot 1[-n]$$

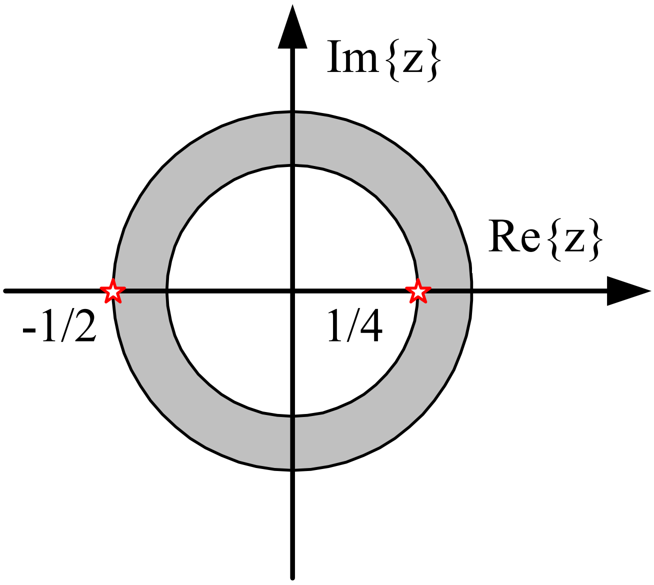
X(z)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0}\left(-\frac{1}{2z}\right)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-2z)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^n$$

Pierwsza suma jest zbieżna dla |2z|<1 lub |z|<1/2. Druga suma jest zbieżna dla |1/(4z)|<1 lub |z|>1/4. Wspólny obszar zbieżności dla tych szeregów stanowi pierścień:

$$\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{1}{1+2z} + \frac{2z}{z-\frac{1}{4}}$$



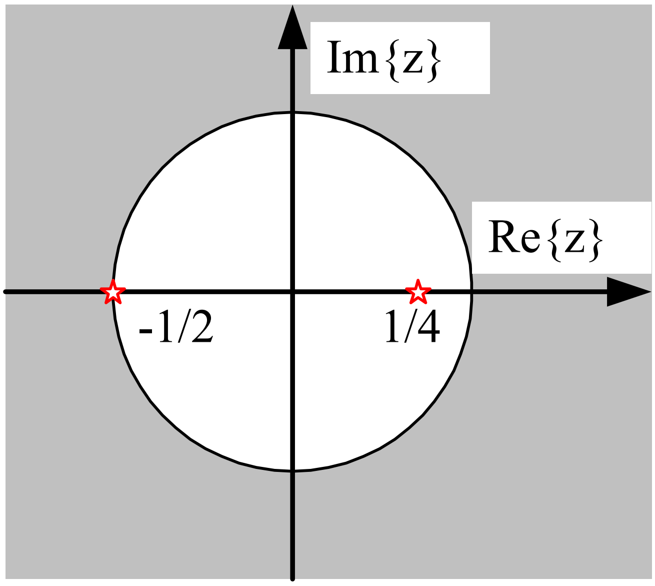
Y(z)

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2z}\right)^{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2z}\right)^{n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^{n}$$

Pierwsza suma jest zbieżna dla $|1/(2z)|<1$ lub $|z|>1/2$. Druga suma jest zbieżna dla $|1/(4z)|<1$ lub $|z|>1/4$. Wspólny obszar zbieżności dla tych szeregów stanowi zewnętrze okręgu:

$$|z|>\frac{1}{2}$$

$$Y(z)=\frac{z}{z+\frac{1}{2}}+\frac{2z}{z-\frac{1}{4}}$$



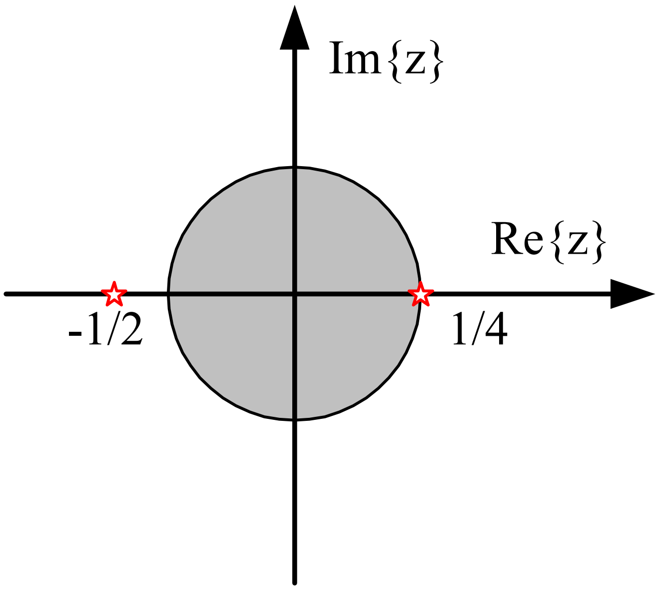
W(z)

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(-\frac{1}{2z}\right)^n + 2\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{4z}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (4z)^n$$

Pierwsza suma jest zbieżna dla $|2z|<1$ lub $|z|<1/2$. Druga suma jest zbieżna dla $|4z|<1$ lub $|z|<1/4$. Wspólny obszar zbieżności dla tych szeregów stanowi wnętrze okręgu:

$$|z| < \frac{1}{4}$$

$$W(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{2z}{z-\frac{1}{4}}$$



Wykorzystanie przekształcenia Laplace'a od wyznaczania transformaty Z:

Transformata **Z** wykładniczego przebiegu prawostronnego ($t \geq 0$):

$$x(t) = e^{-bt} 1(t)$$

$$x^*(t) = e^{-bt} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(t - kT_p\right)$$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-bkT_p} \delta\left(t - kT_p\right)$$

Korzystając z transformaty Laplace'a

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-bkT_p} e^{-skT_p}$$

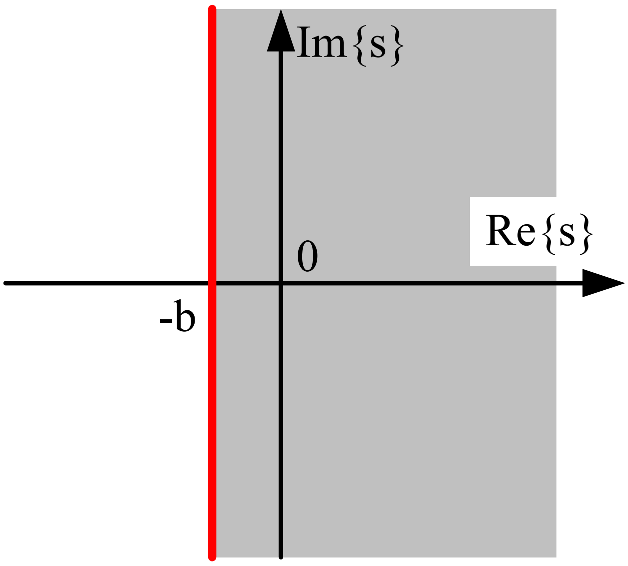
$$X^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-bT_p}e^{-sT_p}\right)^k$$

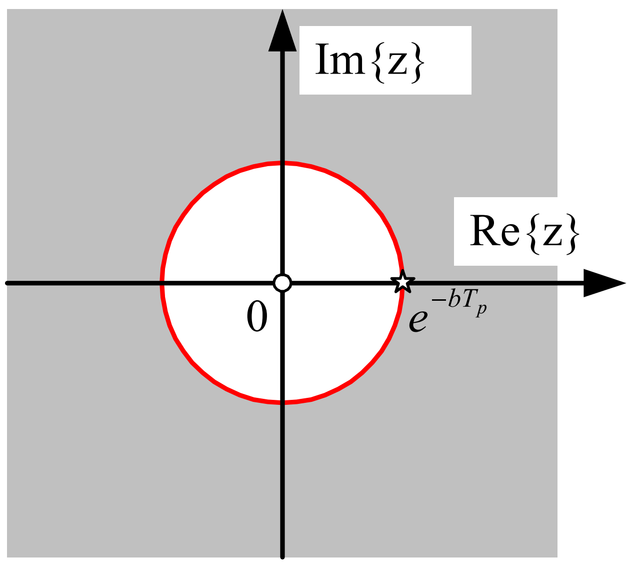
$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-bT_p}z^{-1}\right)^k$$

$$X(z)=\frac{1}{1-e^{-bT_p}z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-e^{-bT_p}}$$

Ponieważ obszar zbieżności transformaty Laplace'a $X(s)=\dfrac{1}{s+b}$ jest półpłaszczyzną położoną na prawo od prostej s=-b dlatego obszarem zbieżności transformaty **Z** jest ***zewnętrze okręgu*** o promieniu e^{-bT_p}





<u>Transformata **z** wykładniczego przebiegu lewostronnego</u> ($t<0$):

$$x(t) = -e^{-bt}1(-t)$$

$$x^*(t) = -e^{-bt} \cdot \sum_{k=-\infty}^{-1} \delta\left(t - kT_p\right)$$
$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} -e^{-bkT_p} \delta\left(t - kT_p\right)$$

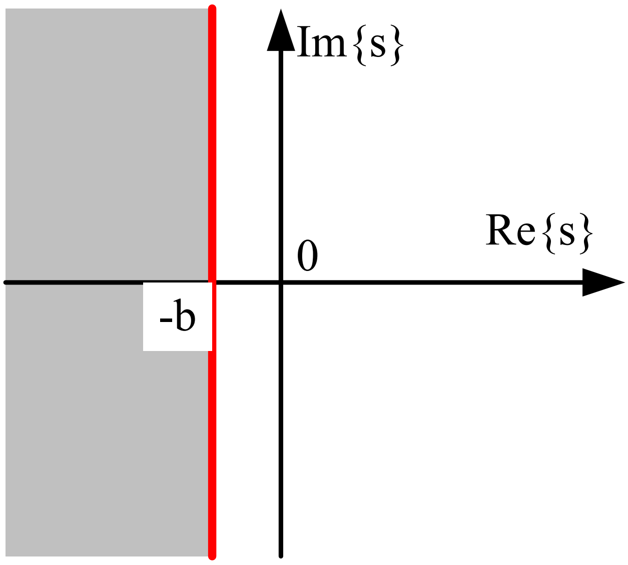
Korzystając z transformaty Laplace'a

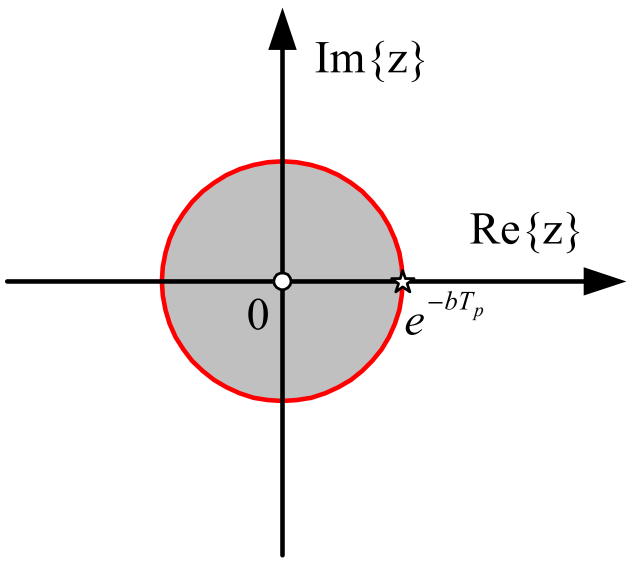
$$X^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{-1} -e^{-bkT_p} e^{-skT_p}$$
$$X^*(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} e^{bkT_p} e^{skT_p}$$
$$X^*(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{bT_p} e^{sT_p}\right)^k$$
$$X(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{bT_p} z\right)^k$$
$$X(z) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{bT_p} z\right)^k$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - e^{bT_p} z} = \frac{1 - e^{bT_p} z - 1}{1 - e^{bT_p} z} = \frac{-z}{e^{-bT_p} - z}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-bT_p}}$$

Ponieważ obszar zbieżności transformaty Laplace'a $X(s) = \frac{1}{s+b}$ jest półpłaszczyzną położoną na lewo od prostej $s=-b$, dlatego obszarem zbieżności transformaty zet jest ***wnętrze okręgu*** o promieniu e^{-bT_p}





Podstawowe właściwości przekształcenia Z:

Przyjmiemy skrótowe oznaczenie transformaty zet sygnału $x[n]$, istniejącej w obszarze zbieżności o promieniu R_x

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad dla \quad OZ \quad R_x$$

LINIOWOŚĆ

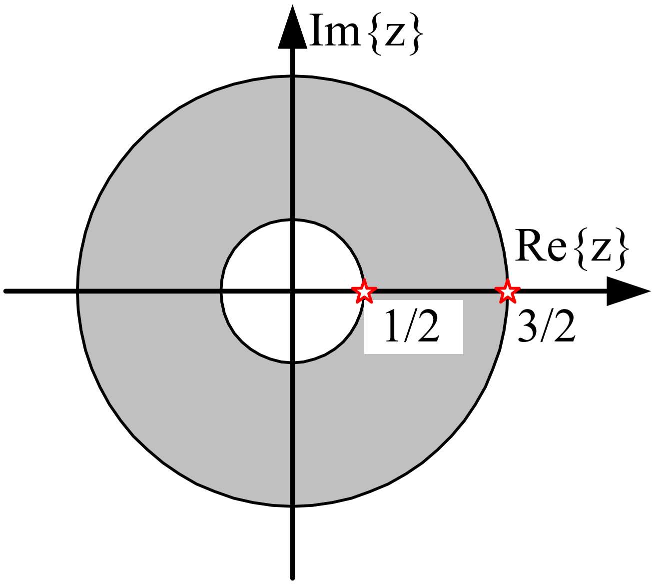
$$ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{Z} aX(z) + bY(z) \quad dla \quad OZ \quad R_x \cap R_y \text{ (wspólny obszar zbieżności)}$$

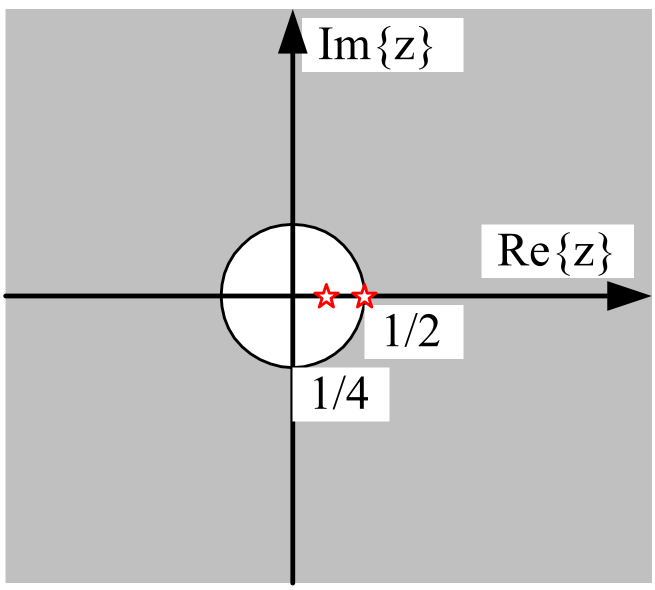
Przykład

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 1[n]-\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot 1[-n-1] \xleftrightarrow{Z} X(z)=\frac{-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)} \quad dla \quad OZ \quad \frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$$

oraz

$$y[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot 1[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 1[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z)=\frac{-\frac{1}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \quad dla \quad OZ \quad \frac{1}{2}<|z|$$





$$ax[n]+by[n]\xleftrightarrow{Z} a\frac{-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}+b\frac{-\frac{1}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\quad dla\ \ OZ\ \ \frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$$

W przypadku gdy $a=b$

$$ax[n]+ay[n]\xleftrightarrow{Z} a\frac{-\frac{5}{4}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}\quad dla\ \ OZ\ \ \frac{1}{4}<|z|<\frac{3}{2}$$

<u>Transformata zet sinusoidalnego przebiegu prawostronnego</u> ($t \geq 0$):

$$x[n]=\sin\left(n\omega_0 T_p\right)\cdot 1[n]$$

Wykorzystamy właściwość liniowości przekształcenia oraz wyprowadzoną wcześniej transformatę sygnału wykładniczego:

$$e^{-nbT_p}1[n]\xleftrightarrow{Z}\frac{z}{z-e^{-bT_p}}$$

Ponieważ

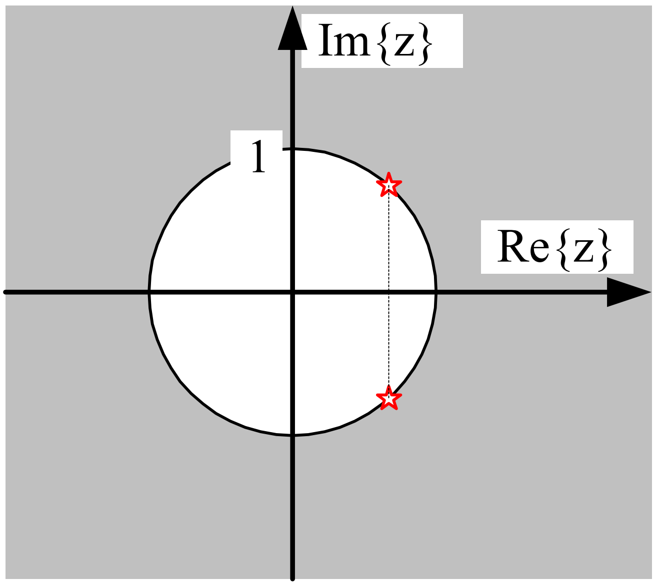
$$\sin(\alpha)=\frac{1}{2j}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{2j}e^{jn\omega_0 T_p}1[n]-\frac{1}{2j}e^{-jn\omega_0 T_p}1[n]\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0 T_p}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega_0 T_p}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{z\left(z-e^{-j\omega_0 T_p}\right)-z\left(z-e^{j\omega_0 T_p}\right)}{\left(z-e^{j\omega_0 T_p}\right)\left(z-e^{-j\omega_0 T_p}\right)}=\frac{1}{2j}\frac{\cancel{z^2}-ze^{-j\omega_0 T_p}-\cancel{z^2}+ze^{j\omega_0 T_p}}{z^2-ze^{j\omega_0 T_p}-ze^{-j\omega_0 T_p}+e^{-j\omega_0 T_p}e^{j\omega_0 T_p}}=$$

$$=\frac{\frac{z}{2j}\left(e^{j\omega_0 T_p}-e^{-j\omega_0 T_p}\right)}{z^2-z\left(e^{j\omega_0 T_p}+e^{-j\omega_0 T_p}\right)+e^0}=\frac{\frac{z}{2j}\left(e^{j\omega_0 T_p}-e^{-j\omega_0 T_p}\right)}{z^2-z\left(e^{j\omega_0 T_p}+e^{-j\omega_0 T_p}\right)+1}$$

$$\sin\left(n\omega_0 T_p\right)\cdot 1[n]\xleftrightarrow{Z}\frac{z\sin\left(\omega_0 T_p\right)}{z^2-2z\cos\left(\omega_0 T_p\right)+1}\quad dla\quad OZ\quad |z|>1$$



ODWRÓCENIE SYGNAŁU W CZASIE

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad dla \quad OZ \quad \frac{1}{R_x}$$

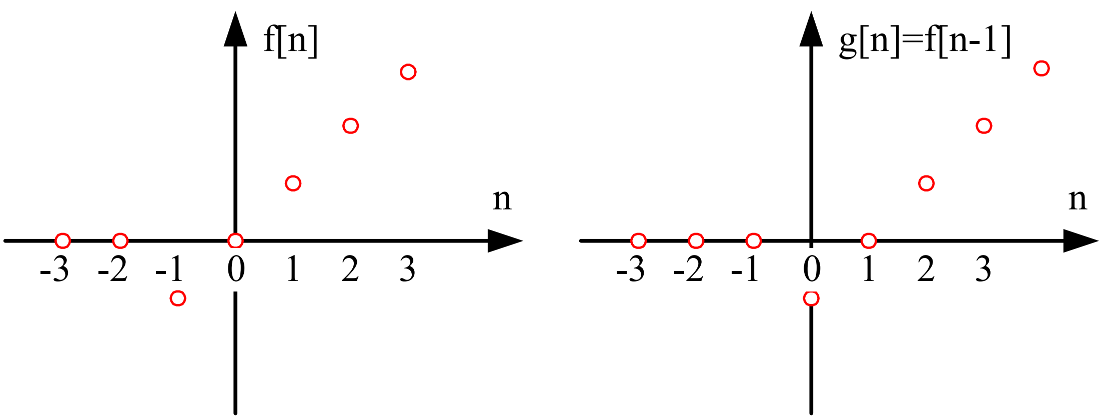
Odwrócenie sygnału w dziedzinie czasu odpowiada zmianie zmiennej z na z^{-1} . Zmianie ulega także obszar zbieżności. Jeżeli R_x jest pierścieniem a<|z|<b to obszar zbieżności sygnału odwróconego a<|1/z|<b lub 1/b<|z|<1/a

PRZESUNIĘCIE SYGNAŁU W CZASIE

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z) \quad dla \quad OZ \quad R_x$$

Mnożenie przez z^{-n_0} wprowadza n_0 biegunów w z=0 gdy $n_0>0$. W tym przypadku jeżeli bieguny nie są redukowane przez pierwiastki $X(z)$, nowy obszar zbieżności nie może zawierać punktu z=0. Natomiast gdy $n_0<0$ mnożenie przez z^{-n_0} wprowadza n_0 biegunów w nieskończoności. Jeżeli bieguny te nie są redukowane przez pierwiastki $X(z)$, nowy obszar zbieżności nie może zawierać punktu $|z| = \infty$

Przykłady:



g[0]=f[-1]
g[1]=f[0]

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g[n]z^{-n}=g[0]+g[1]z^{-1}+g[2]z^{-2}+\ldots$$
$$=f[-1]+f[0]z^{-1}+f[1]z^{-2}+\ldots$$
$$=f[-1]+z^{-1}\left\{\underbrace{f[0]z+f[1]z^{-1}+\ldots}_{F(z)}\right\}$$

Stąd otrzymujemy zależności:

$$f[n-1]\xleftrightarrow{Z} z^{-1}F(z)+f[-1]$$
$$f[n-2]\xleftrightarrow{Z} z^{-1}\underbrace{\left(z^{-1}F(z)+f[-1]\right)}+f[-2]=z^{-2}F(z)+z^{-1}f[-1]+f[-2]$$

$$z\left(Z\{f[n-1]\}-f[-1]\right)=Z\{f[n]\}$$
$$z\left(Z\{f[n]\}-f[0]\right)=Z\{f[n+1]\}$$

$$f[n+1]\xleftrightarrow{Z} z\left(F(z)-f[0]\right)$$
$$f[n+2]\xleftrightarrow{Z} =z\left(\underbrace{z\left(F(z)-f[0]\right)}-f[1]\right)=z^{2}F(z)-z^{2}f[0]-zf[1]$$

MNOŻENIE PRZEZ CIĄG WYKŁADNICZY

$$\alpha^{n}x[n]\xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{\alpha}\right)\quad dla\ \ OZ\ \ |\alpha|R_{x}$$

Jeżeli R_x jest pierścieniem $a<|z|<b$ to obszar zbieżności sygnału $|a|a<|z|<|a|b$. Zmiana obszaru zbieżności wynika z przesuwania się biegunów funkcji $X(z)$. Wszystkie bieguny zostają w jednakowej skali równej $|a|$ przesunięte względem $z=0$.

Wyprowadzimy z definicji przekształcenia zet powyższą własność

$$a^n x[n]1[n] \xleftrightarrow{Z} \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] a^n z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(a^{-1} z\right)^{-n}$$
$$= X\left(a^{-1} z\right)$$

Przykład

$$a^n 1[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-a}$$

Ponieważ

$$1[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-1}$$

to

$$a^n 1[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{a^{-1} z}{a^{-1} z - 1} =$$
$$= \frac{z}{z-a}$$

SPLOT

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) Y(z) \quad dla \quad OZ \quad R_x \cap R_y$$

Splot przebiegów czasowych odpowiada mnożeniu transformat. Z liniowości przekształcenia wynika, że obszar zbieżności może być większy niż część wspólna obszarów dla transformat splatanych sygnałów. Taki przypadek zachodzi wtedy występuje redukcja pierwiastków i biegunów.

RÓŻNICZKOWANIE W DZIEDZINIE „ZET"

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z\frac{d}{dz}X(z) \;\; dla \;\; OZ \;\; R_x$$

Mnożenie sygnału przez n w dziedzinie czasu odpowiada różniczkowaniu oraz mnożeniu przez –*z* w dziedzinie zet. Operacja ta nie zmienia obszaru zbieżności.

Wyprowadzimy tę własność z definicji przekształcenia zet:

$$\begin{aligned} n1[n] &\xleftrightarrow{Z} \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \\ &= 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots \\ &= -z\left\{-z^{-2} - 2z^{-3} - 3z^{-4} - \ldots\right\} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left\{1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots\right\} \\ &= -z\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \end{aligned}$$

stąd

$$\begin{aligned} n1[n] &\xleftrightarrow{Z} -z\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} = \\ &= -z\left\{\frac{z-1-z}{(z-1)^2}\right\} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Przykład:

Znajdziemy transformatę sygnału

$$x[n]=\left(n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n}1[n]\right)*\left(\tfrac{1}{4}\right)^{-n}1[-n]$$

Oznaczymy:

$$w[n]=\left(n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n}1[n]\right)$$

$$y[n]=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{-n}1[-n]$$

<u>Obliczenia dla $w[n]$:</u>

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n}1[n]\xleftrightarrow{\;Z\;}\frac{z}{z+\tfrac{1}{2}}\quad dla\;\; OZ\;\; |z|>\tfrac{1}{2}$$

Wykorzystamy właściwość różniczkowania w dziedzinie zet:

$$n\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n}1[n]\xleftrightarrow{\;Z\;}-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+\tfrac{1}{2}}\right)\quad dla\;\; OZ\;\; |z|>\tfrac{1}{2}$$

$$=-z\left(\frac{z+\tfrac{1}{2}-z}{\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^{2}}\right)$$

$$=\frac{-\tfrac{1}{2}z}{\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^{2}}\quad dla\;\; OZ\;\; |z|>\tfrac{1}{2}$$

<u>Obliczenia dla $y[n]$:</u>

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n}1[n]\xleftrightarrow{\;Z\;}\frac{z}{z-\tfrac{1}{4}}\quad dla\;\; OZ\;\; |z|>\tfrac{1}{4}$$

Wykorzystamy właściwość inwersji w czasie:

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^{-n} 1[-n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}}{z^{-1}-\frac{1}{4}} \quad dla \;\; OZ \;\; \left|\tfrac{1}{z}\right| > \tfrac{1}{4}$$
$$= \frac{-4z}{z-4} \quad dla \;\; OZ \;\; |z| < 4$$

Wykorzystamy właściwość transformaty splotu:

$$x[n] = w[n] * y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = W(z)Y(z) \quad dla \;\; OZ \;\; R_W \cap R_Y$$
$$= \frac{-\frac{1}{2}z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{-4z}{z-4}$$
$$= \frac{2z^2}{(z-4)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \quad dla \;\; OZ \;\; \tfrac{1}{2} < |z| < 4$$