FUNKCJE ZESPOLONE

Lista zadań

2005/2006

Opracowanie: dr Jolanta Długosz

Liczby zespolone

1.1

Obliczyć wartości podanych wyrażeń:

a) $\left(2+\frac{1}{4}i\right)(5+i)$; **b)** $(3-i)(-4+2i)$; **c)** $\left(\frac{1}{4}+i\right)^2$;

d) $(1+i)^4$; **e)** $(-2+3i)^3$; **f)** $\frac{2+3i}{1-i}$;

g) $\frac{(1+i)(2-i)}{(1-i)^2}$.

1.2

Niech $z = x + iy$, gdzie x, $y \in \mathbb{R}$. Znaleźć podane wyrażenia:

a) $\mathrm{Re}\left(z^2\right)$; **b)** $e^{|z|}$; **c)** $\left|z^2\right|$;

d) $|z^n|$; **e)** $\mathrm{Im}\left(z^3\right)$; **f)** $\mathrm{Re}\left(\overline{z}z^2\right)$;

g) $\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)$; **h)** $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$.

1.3

Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej liczbę $e^{i\varphi}$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$:

a) $e^{\pi i}$; **b)** $e^{\frac{\pi}{2}i}$; **c)** $e^{\frac{3}{2}\pi i}$; **d)** $e^{2k\pi i}$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

1.4

Obliczyć podane pierwiastki. Wynik przedstawić w postaci wykładniczej i algebraicznej (jeśli jest w miarę prosta). Podać interpretację geometryczną:

a) $\sqrt[4]{1}$; **b)** $\sqrt[9]{-8i}$; **c)** $\sqrt[3]{-27}$; **d)** $\sqrt[3]{-1+i}$.

1.5

Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory określone podanymi warunkami:

a) $|z-1| < 1$; **b)** $2 < |z+2i| < 3$; **c)** $|z-1+i| > 3$;

d) $0 < |1-i-z| \leqslant 4$; **e)** $|2iz+1| \geqslant 2$; **f)** $|z-i| = \mathrm{Re}\,z$;

g) $\frac{\pi}{4} < \arg(z-3+i) \leqslant \frac{2}{3}\pi$; **h)** $|z-i| = |z-1|$; **i)** $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(iz) < 1$.

1.6

Rozwiązać podane równania:

a) $z^2 + 4z + 5 = 0$; **b)** $z^2 + (2-4i)z - 11 + 2i = 0$;

c) $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$; **d)** $z^3 - 8 = 0$.

Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

2.1

Obliczyć:

a) $\sin(-2i)$; **b)** $\cos(1+i)$; **c)** $\mathrm{Log}\,(-4)$;

d) $\log\,(-4)$; **e)** $\mathrm{Log}\left(\sqrt{3}+i\right)$; **f)** $\log\left(\sqrt{3}+i\right)$.

2.2

Dowieść, że:

a) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$; **b)** $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$;

c) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$; **d)** $e^{z+2k\pi i}=e^z$ dla $k\in\mathbb{Z}$; **e)** $e^z\neq 0$ dla każdego $z\in\mathbb{C}$.

2.3

Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną podanych funkcji:

a) $f(z)=z^2$; **b)** $f(z)=\dfrac{1}{z}$; **c)** $f(z)=iz^3+z$;

d) $f(z)=\sin z$; **e)** $f(z)=\mathrm{ch}\,z$; **f)** $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

2.4

Pokazać, że istnieją liczby zespolone z takie, że: $|\sin z|>1$, $|\cos z|>1$.

2.5

Rozwiązać podane równania:

a) $e^{z+i}=-4$; **b)** $e^z=e^{\mathrm{Re}\,z}$; **c)** $\cos z=-2$; **d)** $\sin z=i$.

2.6

Napisać wzór odwzorowania $w=f(z)$, gdzie $z\in\mathbb{C}$, gdy f jest:

a) translacją o wektor z_0;

b) obrotem o kąt φ (w szczególności dla $\varphi=\pi/2$) wokół punktu $z=0$;

c) jednokładnością w stosunku $k>0$ o środku $z=0$;

d) odbiciem symetrycznym względem osi Ox, Oy, prostej $y=x$.

2.7

Jakie jest równanie prostej prostopadłej do prostej $z(t)=z_1+z_2t$, gdzie $t\in\mathbb{R}$, i przechodzącej przez punkt z_0? Napisać równanie prostej prostopadłej do prostej $z(t)=2i+(i-2)t$, gdzie $t\in\mathbb{R}$, i przechodzącej przez punkt $z_0=2+i$. Wykonać rysunek.

2.8

Znaleźć obraz zbioru D przy odwzorowaniu $w=f(z)$. Narysować zbiór D i jego obraz, jeśli:

a) $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z-1+2i|\leqslant\sqrt{5}\right\},\ \ f(z)=(2+i)z+3i;$

b) $D=\left\{z\in\mathbb{C}:0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{3},1\leqslant|z|\leqslant 2\right\},\ \ f(z)=z^2;$

c) $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2},\ |z|\leqslant 1\right\},\ \ f(z)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\overline{z};$

d*) $D=\{z\in\mathbb{C}:0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1, 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1\},\ \ f(z)=z^2.$

2.9

Znaleźć obraz:

a) i) okręgu $|z|=1$; ii) prostej $y=x$ bez punktu $(0,0)$; przy odwzorowaniu $w=\frac{1}{z}$.

b) i) okręgu $|z|=1$ bez punktu $z=1$; ii) prostej $y=x$; przy odwzorowaniu $w=\frac{1}{z-1}$.

2.10

a) Znaleźć obraz prostych $x=x_0$, $y=y_0$ i obraz kwadratu D z **Zadania 2.8 d*)** przy odwzorowaniu $w=e^z$.

b) Odwzorować obszar $D=\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<e,-\pi<\arg z<\pi\}$ za pomocą funkcji $w=\log z$ (logarytm główny).

* 2.11

Znaleźć obraz zbioru $D=\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z\geqslant 0,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ przy odwzorowaniu

$$w=\frac{z-i}{z+i}.$$

Wykonać rysunek.

* 2.12

Zbadać ciągłość podanych funkcji:

a) $f(z)=\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}$; **b)** $f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Re} z}{z} & \text{dla } z\neq 0,\\ 0 & \text{dla } z=0;\end{cases}$ **c)** $f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Re} z^2}{z} & \text{dla } z\neq 0,\\ 0 & \text{dla } z=0.\end{cases}$

Wskazówka. Przedstawić z^2 w postaci trygonometrycznej.

2.13

Wykazać, że podane funkcje spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna:

a) $f(z)=e^z$; **b)** $f(z)=\cos z$; **c)** $f(z)=\frac{1}{z}$; **d)** $f(z)=\log z$.

2.14

W jakich punktach podane funkcje mają pochodne, a w jakich są holomorficzne? Podać wartość pochodnej w punktach, w których istnieje:

a) $f(z)=\frac{z}{|e^z|}$; **b)** $f(z)=z\,(\operatorname{Re} z)^2$; **c)** $f(z)=ze^{|z|^2}$; **d)** $f(z)=|z|^2e^{\operatorname{Re} z}$.

2.15

Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ wiedząc, że:

a) $u(x,y) = 2xy + y, \ f(-2) = i;$

b) $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \ f(2) = 0;$

c) $v(x,y) = e^x \sin y + 2y, \ f(0) = 5.$

Całki funkcji zespolonych

3.1

Napisać równania parametryczne podanych krzywych:

a) prostej przechodzącej przez punkty $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 - i$;

b) odcinka łączącego punkty $z_1 = 0$, $z_2 = -2i$;

c) odcinka łączącego punkty $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -1$;

d) okręgu o środku $z_0 = 2 - i$ i promieniu $r = 3$;

e) elipsy o środku $z_0 = 0$ i półosiach a, b;

f) hiperboli $y = \dfrac{1}{x}$;

g) części paraboli $y = x^2$ zawartej między punktami $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 3i$.

*** 3.2**

Napisać równanie stycznej do krzywej $z(t) = t^2 + i \sin t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, w punkcie z_0 odpowiadającym wartości parametru $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

*** 3.3**

Znaleźć kąt nachylenia do osi $\operatorname{Re} z$ stycznej do krzywej $z(t) = t^2 + it$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, w punkcie $z_0 = \dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

*** 3.4**

Określić punkt i kąt przecięcia się krzywych o równaniach parametrycznych

$$z(t) = t + \frac{1}{8}ti, \ \text{ gdzie } t \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad w(t) = t^2 + \frac{1}{t}i, \ \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}?$$

3.5

Obliczyć podane całki:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + 2ti)\, dt;$

b) $\displaystyle\int_0^{2} \left[1 + (1+i)t^2\right] dt;$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + i \sin 2t)\, dt;$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1 - e^t i\right) dt.$

3.6

Obliczyć podane całki po zadanych krzywych:

a) $\int\limits_C |e^z|\,\overline{z}\,dz$, C – odcinek o początku $-i$ i końcu 1;

b) $\int\limits_C (3z+1)\overline{z}\,dz$, C – półokrąg $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ o początku $-i$ i końcu i;

c) $\int\limits_C e^{\overline{z}}\,dz$, C – łamana o wierzchołkach kolejno 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}(1-i)$;

d) $\int\limits_C (z - \overline{z})\,dz$, C – łuk paraboli $y = x^2$ o początku $1+i$ i końcu 0;

e) $\int\limits_C \overline{z}\operatorname{Re} z^2\,dz$, C – ćwiartka okręgu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, \operatorname{Re} z \geqslant 0, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ o początku $2i$ i końcu 2.

3.7

Obliczyć podane całki po wskazanej krzywej regularnej C o zadanym początku z_1 i końcu z_2:

a) $\int\limits_C e^{iz}\,dz$, C – dowolna krzywa, $z_1 = i$, $z_2 = 0$;

b) $\int\limits_C 2z\cos\left(iz^2\right)\,dz$, C – dowolna krzywa, $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = \frac{\pi}{2}i$;

c) $\int\limits_C z\sin z\,dz$, C – dowolna krzywa, $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{\pi}{2}i$;

d) $\int\limits_C \frac{z\,dz}{z^2+2}$, C – odcinek, $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$.

3.8

Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego lub jego uogólnień obliczyć podane całki:

a) $\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(z-2i)}$, C – okrąg $|z - 3i| = 2$ zorientowany dodatnio;

b) $\int\limits_C \frac{ze^{2\pi z}dz}{z^2+1}$, C – łamana zamknięta o wierzchołkach $0, 1+2i, -1+2i$ zorientowana dodatnio;

c) $\int\limits_C \frac{dz}{\left(z^2+9\right)^2}$, C – okrąg $|z - 2i| = 2$ zorientowany dodatnio;

d) $\displaystyle\int_C \frac{\sin z\,dz}{\left(z^2-\pi^2\right)^2}$, C – okrąg $|z-3|=1$ zorientowany dodatnio;

e) $\displaystyle\int_C \frac{e^z\,dz}{z\left(z-\pi i\right)^3}$, C – okrąg $|z-\pi i|=1$ zorientowany dodatnio.

3.9

Obliczyć całkę

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3},$$

gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem o promieniu r i środku z_0, jeśli:

a) $r<2$, $z_0=1$; **b)** $r<2$, $z_0=-1$; **c)** $r>2$, $z_0=-1$ lub $z_0=1$.

Szeregi zespolone

4.1

Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność podanych szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{3^n}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+i}{in^4+1}$; **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+i)^n}{n^n}$.

4.2

Znaleźć promienie i koła zbieżności podanych szeregów potęgowych:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n z^n}{n!}$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$; **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2i)^n z^{3n}}{n(1-i)^n}$

f*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}z^{2n}$; **g*)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,z^n}{(n+i)^n}$.

4.3

Rozwinąć w szereg Taylora funkcję $f(z)$ w otoczeniu punktu z_0 i znaleźć koło zbieżności otrzymanego szeregu:

a) $f(z)=z\sin z^2$, $z_0=0$; **b)** $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$, $z_0=i$;

c*) $f(z)=\sin z$, $z_0=\pi i$; **d)** $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z}$ dla $z\neq 0$, $f(0)=0$, $z_0=0$;

e) $f(z)=\dfrac{z^2}{z+2}$, $z_0=2$; **f)** $f(z)=e^z$, $z_0=\pi i$.

4.4

Znaleźć wszystkie zera podanych funkcji i zbadać ich krotność:

a) $f(z) = \left(z^3+1\right)^2 z^4$; **b)** $f(z) = z^2\left(e^{iz}-1\right)$; **c)** $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$;

d) $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z}$; **e)** $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^z}$; **f)** $f(z) = \sin z\left(e^{iz}-1\right)$.

Punkty osobliwe i residua

5.1

Znaleźć pierścień zbieżności i sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, jeżeli:

a) $c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \geqslant 0, \\ 2^{-n-1} & \text{dla } n < 0; \end{cases}$ **b)** $c_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{(2i)^{n+1}} & \text{dla } n \geqslant 0, \\ i^{n+1} & \text{dla } n < 0; \end{cases}$

c*) $c_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^{n+1}} & \text{dla } n \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } n = -2, \\ -1 & \text{dla } n < 0,\ n \neq -2. \end{cases}$

5.2

Znaleźć rozwinięcie funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta we wskazanym pierścieniu P:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, $P = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$;

b) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$;

c) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+3)}$, $P = \{z \in \mathbb{C} : 4 < |z+3| < \infty\}$;

d) $f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$, $P = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$;

e) $f(z) = (z^2+2z)e^{\frac{i}{z}}$, $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$;

f*) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$, $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \infty\}$.

Wskazówka do **f*)**. Wykorzystać równość $z = (z-1)+1$.

5.3

Określić rodzaj punktów osobliwych odosobnionych podanych funkcji. W przypadku biegunów zbadać ich krotność:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$; **b)** $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2-\pi^2}$; **c)** $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$;

d) $f(z) = z \operatorname{tg} z$; **e)** $f(z) = \dfrac{z^2}{e^z-1}$; **f)** $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z}$;

g) $f(z) = \dfrac{1}{z(\cos z - 1)}$; **h)** $f(z) = \dfrac{e^{\frac{z}{z-1}}}{e^z-1}$; **i*)** $f(z) = \dfrac{e^z-1}{e^{\frac{1}{z}}-1}$.

5.4

a) Jak oblicza się residua w punkcie istotnie osobliwym?

b) Dlaczego w przypadku punktu istotnie osobliwego próby stosowania wzorów służących do obliczania residuów w biegunach muszą zakończyć się fiaskiem?

c) Podać przykład funkcji, dla której punkt $z = 0$ jest istotnie osobliwy i $\operatorname{res}_0 f(z) = a$, gdzie a jest dowolną liczbą zespoloną.

5.5

Obliczyć residua funkcji $f(z)$ w punktach osobliwych:

a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}$; **b)** $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$; **c)** $f(z) = \dfrac{1}{z^3-z^5}$;

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \cos z}$; **e)** $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$; **f)** $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$;

g) $f(z) = \dfrac{1}{1-z^8}$ w punkcie $z = i$.

5.6

Korzystając z twierdzenia całkowego o residuach obliczyć podane całki:

a) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{z^2+2z+2}$, C – okrąg $|z| = 2$ zorientowany dodatnio;

b) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, C – okrąg $x^2+y^2 = 2x+2y$ zorientowany dodatnio;

c) $\displaystyle\int_C \frac{e^{\pi z}\,dz}{2z^2-i}$, C – okrąg $|z| = 1$ zorientowany dodatnio;

d) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{e^{2z}-1}$, C – okrąg $|z-2i| = 3$ zorientowany dodatnio;

e) $\displaystyle\int_C (z+1)e^{\frac{1}{z}}\,dz$, C – okrąg $|z| = \dfrac{1}{3}$ zorientowany dodatnio.

5.7

Obliczyć podane całki niewłaściwe:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$; **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+5)}$.

Przekształcenie Laplace'a

6.1

Narysować wykres funkcji $f(t)$ i znaleźć jej transformatę Laplace'a, jeżeli:

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \\ t & \text{dla} \quad t \in [0,1], \\ 1 & \text{dla} \quad t > 1; \end{cases}$ **b)** $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \;\; t \in (0,1), \\ -1 & \text{dla} \;\; t \in (1,2), \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

6.2

Niech $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Udowodnić następujące własności przekształcenia Laplace'a i przekształcenia odwrotnego:

a) $\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$, gdzie $a \in \mathbb{C}$;

b) $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, gdzie $a > 0$;

c) $\mathcal{L}^{-1}\{F(cs)\} = \dfrac{1}{c} f\left(\dfrac{t}{c}\right)$, gdzie $c > 0$.

6.3

Korzystając z własności przekształcenia Laplace'a wyznaczyć transformaty podanych funkcji:

a) $f(t) = \operatorname{sh} \omega t$; **b)** $f(t) = \sin^2 \omega t$;

c) $f(t) = \cos(\omega t - \delta)\, \mathbf{1}(\omega t - \delta)$; **d)** $f(t) = e^{at} \sin^2 \omega t$;

e) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \\ t & \text{dla} \quad t \in [0,1], \\ 1 & \text{dla} \quad t > 1; \end{cases}$ **f)** $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \;\; t \in (0,1), \\ -1 & \text{dla} \;\; t \in (1,2), \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

6.4

Korzystając z własności przekształcenia Laplace'a wyznaczyć transformaty podanych funkcji:

a) $f(t) = (at - t_0)^n$; **b)** $f(t) = t \sin \omega t$; **c)** $f(t) = t^2 \cos \omega t$;

d) $f(t) = \dfrac{1}{2}(\sin t + t \cos t)$; **e*)** $f(t) = \dfrac{\sin \omega t}{t}$; **f*)** $f(t) = \dfrac{\cos \omega t - 1}{t}$;

g*) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau}\, d\tau$.

6.5

Naszkicować podane oryginały okresowe i znaleźć ich transformaty Laplace'a:

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 2n \leqslant t < 2n+1, \\ -1 & \text{dla} \quad 2n+1 \leqslant t < 2n+2, \end{cases}$ gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$;

b) $f(t) = \begin{cases} t - 2n & \text{dla} \quad 2n \leqslant t < 2n+1, \\ -t + 2n + 2 & \text{dla} \quad 2n+1 \leqslant t < 2n+2, \end{cases}$ gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$;

c) $f(t) = \max\{\sin \omega t, 0\}$.

6.6

Wykorzystując całkę Laplace'a obliczyć podane całki niewłaściwe:

a) $\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos\pi t\,dt$; **b)** $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\left(t^4-2t^2+4\right)\,dt$;

c) $\int\limits_0^\infty e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\,dt$; **d*)** $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{te^{2t}}\,dt$.

6.7

Metodą rozkładu na ułamki proste znaleźć oryginał, gdy:

a) $F(s)=\dfrac{s^3-3s^2-7s-8}{(s+1)^2(s^2+4)}$; **b)** $F(s)=\dfrac{4s^3+9s^2+8s+2}{s(s+2)(s^2+1)}$;

c) $F(s)=\dfrac{4s^2+20s+26}{s(s^2+6s+13)}$; **d)** $F(s)=\dfrac{3s^3-8s^2+21s-8}{(s-2)^2(s^2+2s+5)}$.

6.8

Metodą residuów wyznaczyć oryginały, których transformatami są podane funkcje:

a) $F(s)=\dfrac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$; **b)** $F(s)=\dfrac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2}$; **c)** $F(s)=\dfrac{s-1}{s(s^2+2s+2)^2}$.

6.9

Sprawdzić, czy podane funkcje są transformatami Laplace'e oryginałów okresowych. Znaleźć te oryginały i naszkicować ich wykresy:

a) $F(s)=\dfrac{A}{s}\dfrac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{1-e^{-2s}}$; **b)** $F(s)=\dfrac{1}{s^2}\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-2s}+e^{-3s}}{1-e^{-3s}}$; **c)** $F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}\dfrac{e^{-2\pi s}+e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}}$.

6.10

Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych:

a) $y'+y=\sin t,\ y(0)=0$;

b) $y''-y'-6y=2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;

c) $y''+4y'+13y=2e^{-t},\ y(0)=0,\ y'(0)=-1$;

d) $y''-2y'+y=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

6.11

Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla układów równań różniczkowych:

a) $\begin{cases} x'=-y, \\ y'=2x+2y, \end{cases}\quad x(0)=y(0)=1$;

b) $\begin{cases} x'+2y=3t, \\ y'-2x=4, \end{cases}\quad x(0)=2,\ y(0)=3$;

c) $\begin{cases} x'=y-z, \\ y'=x+y, \\ z'=x+z, \end{cases}\quad x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=3.$

6.12

Sprawdzić twierdzenie Borela dla podanych splotów funkcji:

a) $t * \sin t$; **b)** $t * t^2$; **c)** $\cos t * e^t$.

6.13

Korzystając z twierdzenia Borela o splocie wyznaczyć oryginały, których transformatami są podane funkcje:

a) $F(s) = \dfrac{5s}{(s^2+1)(s-1)}$; **b)** $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$; **c)** $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$.