

1. Wstęp. Pojęcie grafu przepływowego.

Niech pewien system liniowy będzie opisany układem liniowych równań algebraicznych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie: x_1, x_2 - zmienne reprezentujące wielkości występujące w układzie

Przepiszmy układ (1.1) w zmienionej postaci

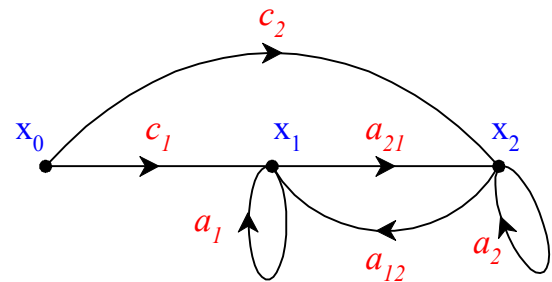
$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11} + 1)x_1 + a_{12}x_2 + c_1x_0 = a_1x_1 + a_{12}x_2 + c_1x_0 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + (a_{22} + 1)x_2 + c_2x_0 = a_{21}x_1 + a_2x_2 + c_2x_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdzie: x_0 - parametr, który może być uważany jako wielkość wejściowa układu, przy czym:

$$b_1 = -c_1x_0, b_2 = -c_2x_0 \quad (1.3)$$

Można zauważyć, że każdej z niewiadomych x_1, x_2 zostało przypisane jedno równanie, w którym wielkość ta stanowi kombinację liniową wszystkich niewiadomych oraz parametru x_0 .¹⁾

Układ równań w postaci (1.2) można zobrazować graficznie za pomocą tzw. grafu przepływowego (Rys. 1.1). W ujęciu tym każdej wielkości (niewiadomej) przyporządkowany zostaje węzeł (wierzchołek) grafu, natomiast operacje między wielkościami symbolizowane są za pomocą zorientowanych gałęzi (krawędzi) rozpiętych między węzłem początkowym i końcowym.



Rys. 1.1

Wartość wielkości przyporządkowanej do wierzchołka stanowiącego węzeł końcowy kilku gałęzi, równa jest sumie iloczynów transmitancji oraz wartości wielkości odpowiadających węzłom początkowym tych gałęzi.

Powyższe stwierdzenie określa jednocześnie jedną z możliwych metod tworzenia grafu przepływowego, jako **geometrycznej reprezentacji równań** opisujących system liniowy. Struktura grafu odzwierciedla zatem jedynie związki między sygnałami i nie należy utożsamiać jej ze strukturą realnie istniejących połączeń, między poszczególnymi elementami układu.

Modelowanie równań opisujących układ w postaci grafu przepływowego nie jest celem samym w sobie. Stanowi ono podstawę do dalszej analizy zależności między wielkościami układu, a w szczególności między wielkościami wejściowymi i wyjściowymi. Możemy zatem stwierdzić, że metoda ta najlepiej sprawdza się dla tzw. układów transmisyjnych, rozpatrywanych w konwencji wejście-wyjście, w których jednym z głównych zadań analizy jest wyznaczanie transmitancji.

Przyjmując, że wielkościom wejściowym i wyjściowym układu, zostały przyporządkowane określone wierzchołki grafu, to w celu wyznaczenia transmitancji dokonać należy redukcji innych węzłów grafu oraz wyeliminować wszystkie połączenia między węzłami wyjściowymi. W ten sposób gałęziom łączącym pozostałe po redukcji węzły, będą bezpośrednio przypisane poszukiwane transmitancje.

¹⁾ Oczywiście jest, że przejście od układu (1.1) do (1.2) nie jest jednoznaczne.

2. Podstawowe określenia. Zasady redukcji grafów.

Grafem przepływowym nazywamy skończony, spójny zbiór wierzchołków (węzłów) połączonych zorientowanymi krawędziami (gałęziami).

Gałąz grafu reprezentuje operację (transmitancję) między wielkościami.

Węzeł grafu reprezentuje wielkość lub sygnał o wartości równej sumie sygnałów przekazywanych przez gałęzie, których dany węzeł jest węzłem końcowym.

Rozróżniamy następujące rodzaje węzłów:

- Węzeł, który nie jest węzłem końcowym żadnej z gałęzi nazywamy **węzłem źródłowym**, odgrywa on rolę pobudzenia lub sygnału wejściowego;
- Węzeł, który nie jest węzłem początkowym żadnej z gałęzi nazywamy **węzłem odbiorczym**, odpowiada on sygnałom wyjściowym układu.
- Węzły nie będące węzłami źródłowymi ani odbiorczymi nazywamy **węzłami pośrednimi**. Każdemu węzłowi pośredniemu można przyporządkować wielkość wyjściową. W tym celu należy utworzyć dodatkowy węzeł połączony z danym węzłem odpowiednio zorientowaną gałęzią o transmitancji równej 1 .

W tabeli 2.1 zestawiono podstawowe sposoby eliminacji węzłów pośrednich oraz pętli własnych węzłów. W każdym przypadku obowiązuje zasada, że wszelki przekształcenie grafu nie może zmienić transmitancji ścieżek między pozostałymi po redukcji wierzchołkami grafu.

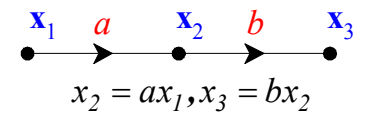
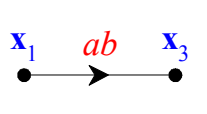
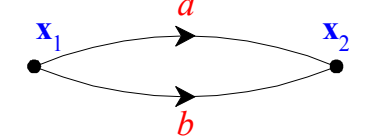
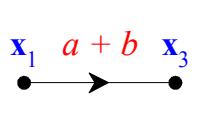
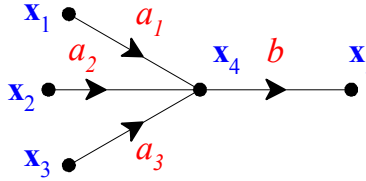
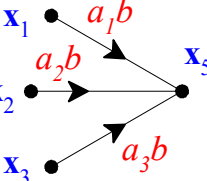
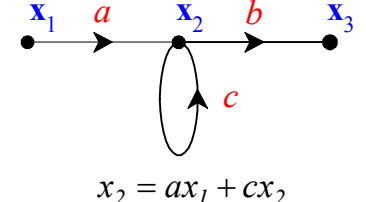
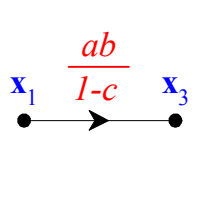
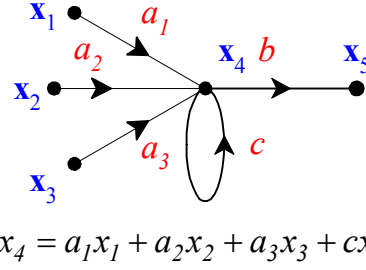
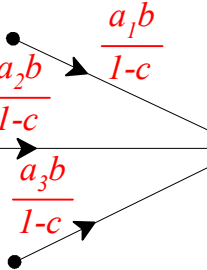
1.	 $x_2 = ax_1, x_3 = bx_2$	 $x_3 = abx_1$	Połączenie szeregowe
2.		 $x_2 = (a + b)x_1$	Połączenie równoległe
3.		 $x_5 = a_1b x_1 + a_2b x_2 + a_3b x_3$	
4.	 $x_2 = ax_1 + cx_2$	 $x_3 = \frac{ab}{1-c} x_1$	Eliminacja pętli własnej:
5.	 $x_4 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + cx_4$	 $x_5 = \frac{a_1b}{1-c} x_1 + \frac{a_2b}{1-c} x_2 + \frac{a_3b}{1-c} x_3$	

Tabela 2.1

Dodatkowe określenia

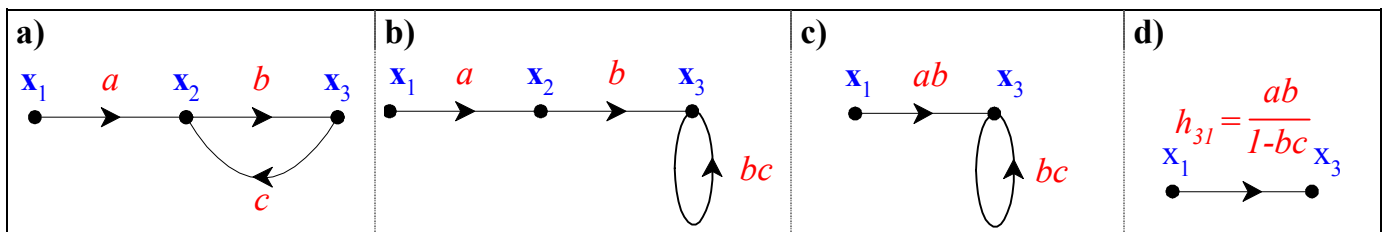
Ścieżka nazywamy zbiór jednakowo zorientowanych gałęzi łączących wybrane węzły grafu. Ścieżka, podobnie jak gałąź, posiada węzeł początkowy i końcowy.

Pętla grafu nazywamy ścieżkę, w której ten sam węzeł jest węzłem początkowym i końcowym.

Pętla własna wierzchołka grafu nazywamy pętlę zawierającą tylko jedną gałąź.

Przykład 1. Redukcja grafu z jedną pętlą.

Rozważmy eliminację węzła pośredniego w grafie przedstawionym na Rys. 2.1. Zawiera on trzy węzły, w tym jeden węzeł początkowy i dwa węzły pośrednie. Przyjmując węzeł x_3 jako węzeł końcowy wyznaczmy transmitancję określoną stosunkiem sygnału x_3 do x_1 .

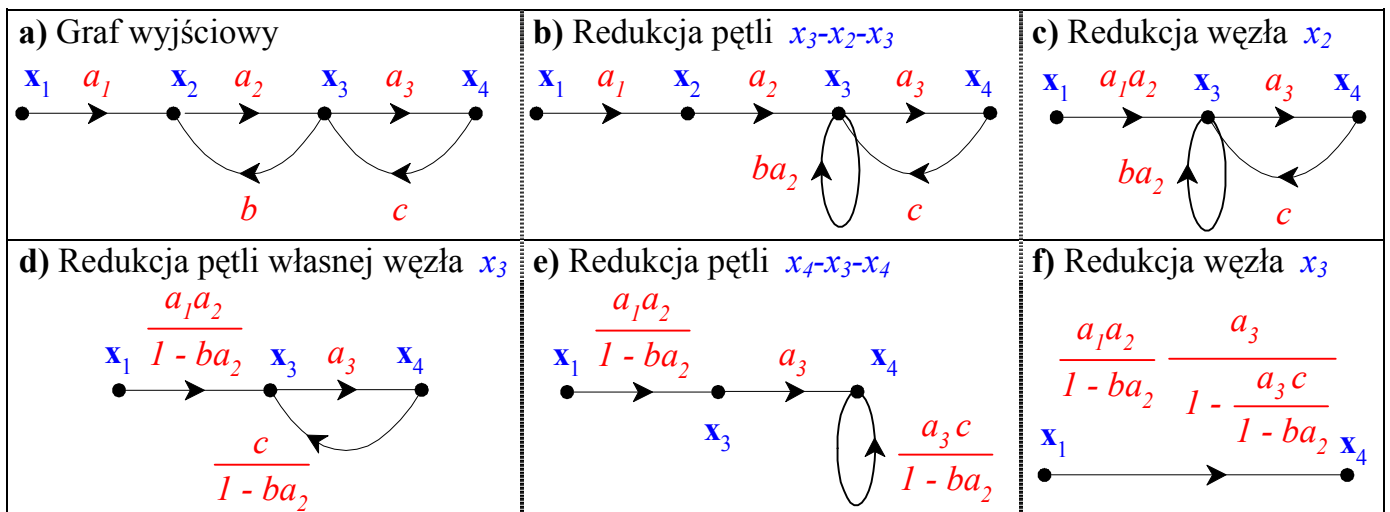


Rys. 2.1

Przejście od grafu a) do b) uwzględnia niezmiennosc transmitancji pętli $x_3-x_2-x_3$. Powstałą w ten sposób pętlę własną eliminujemy stosując zasadę 4 z tabeli 2.1.

Przykład 2. Eliminacja kaskady pętli.

W stosunku do przykładu poprzedniego, eliminacja pętli własnej węzła x_3 musi uwzględnić także transmitancję ścieżki (pętli) $x_4-x_3-x_4$. Zgodnie z zasadą 5 (tab.2.1) transmitancje wszystkich gałęzi dochodzących do węzła x_3 muszą być podzielone przez $1 - ba_2$ (Rys. 2.2 d).



Rys. 2.2

Po przekształceniu ostatniego wyrażenia transmitancja wynosi

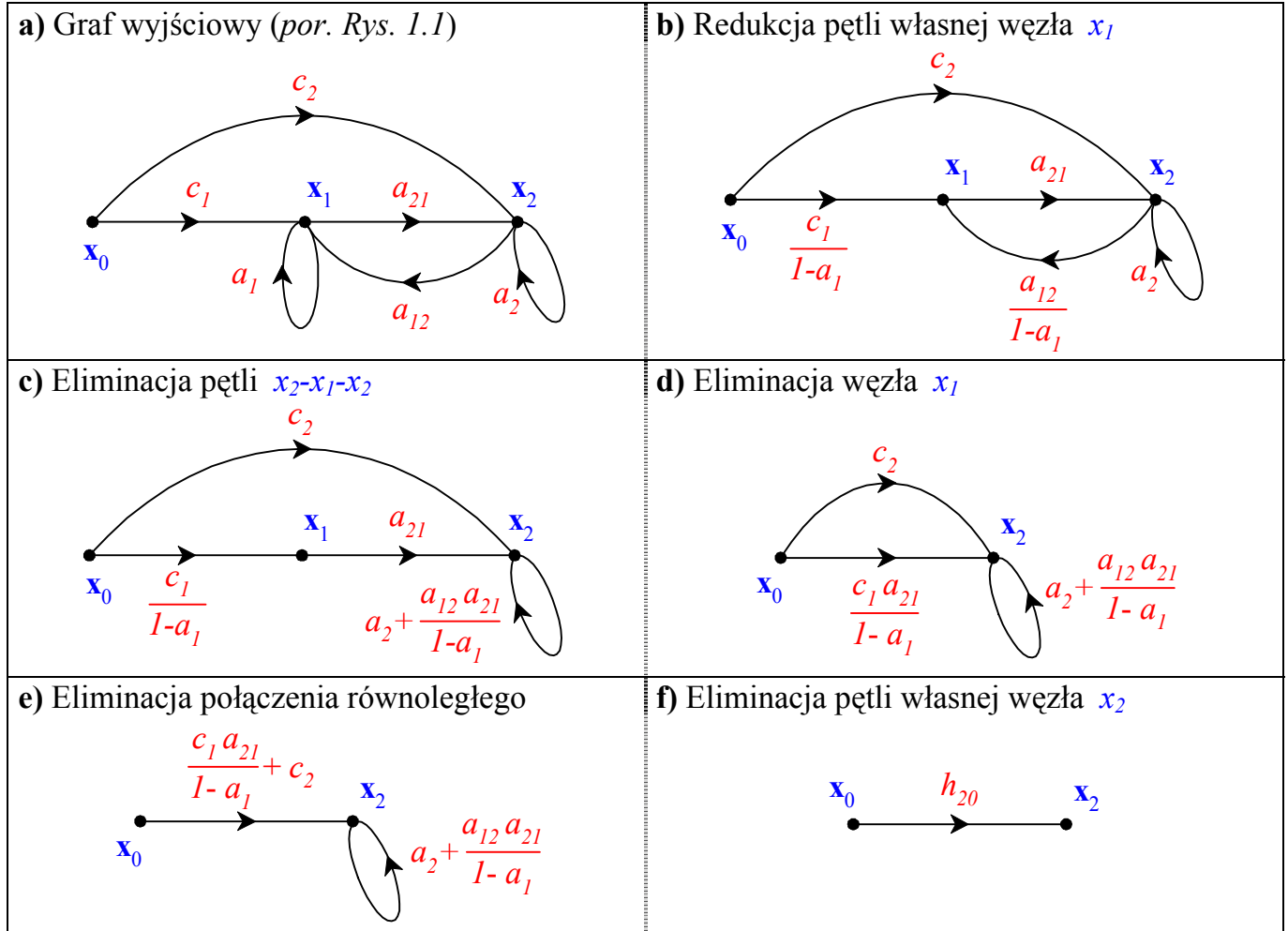
$$h_{41} = \frac{a_1 a_2 a_3}{1 - ba_2 - ca_3} \quad (2.1)$$

3. Wyznaczanie transmitancji układów za pomocą grafów przepływowych.

Przykłady redukcji grafów.

Przykład 3.

Wykorzystując poznane zasady redukcji grafów wyznaczmy jedną z możliwych transmitancji układu opisanego równaniami (1.2). Wielkość wejściową będzie x_0 , natomiast wyjściową x_2 .



Rys. 3.1

$$h_{20} = \frac{\frac{c_1 a_{21}}{1-a_1} + c_2}{1-a_2 - \frac{a_{12} a_{21}}{1-a_1}} = \frac{c_1 a_{21} + (1-a_1)c_2}{(1-a_1)(1-a_2) - a_{12} a_{21}}$$

Uwzględniając, że

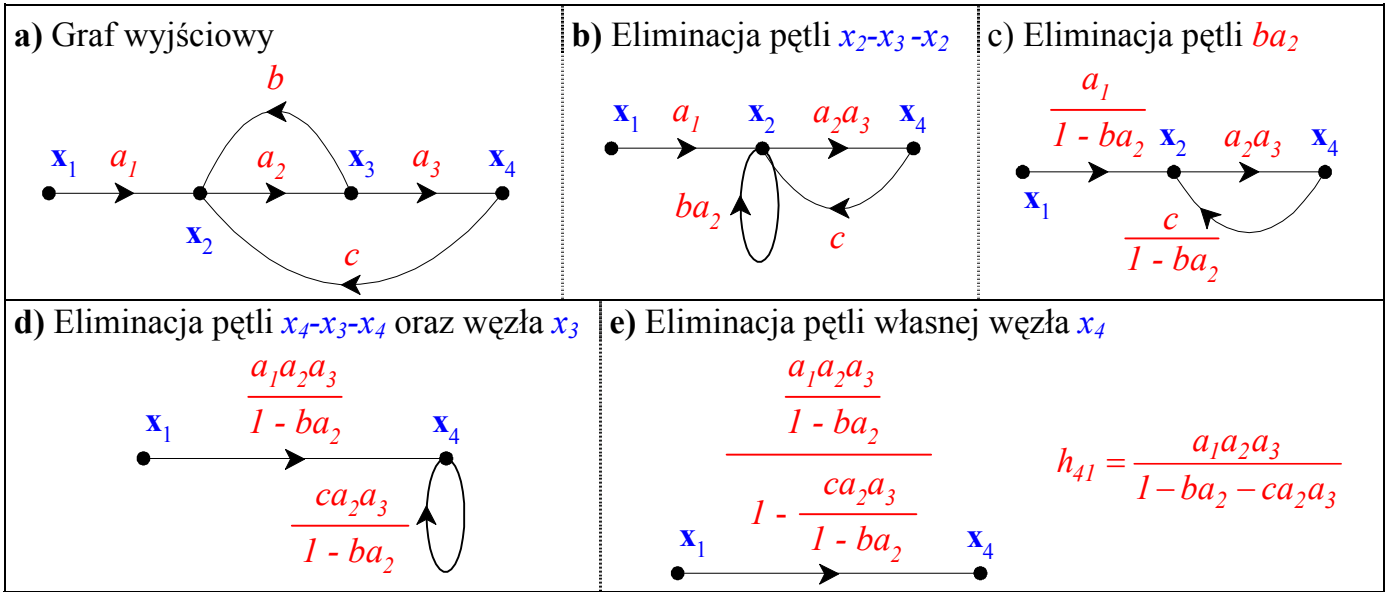
$$1-a_2 = -a_{11}, \quad 1-a_2 = -a_{22}$$

otrzymujemy

$$h_{20} = \frac{c_1 a_{21} - c_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad \text{stąd} \quad x_2 = h_{20} x_0 = \frac{c_1 a_{21} - c_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} x_0 \quad (3.1)$$

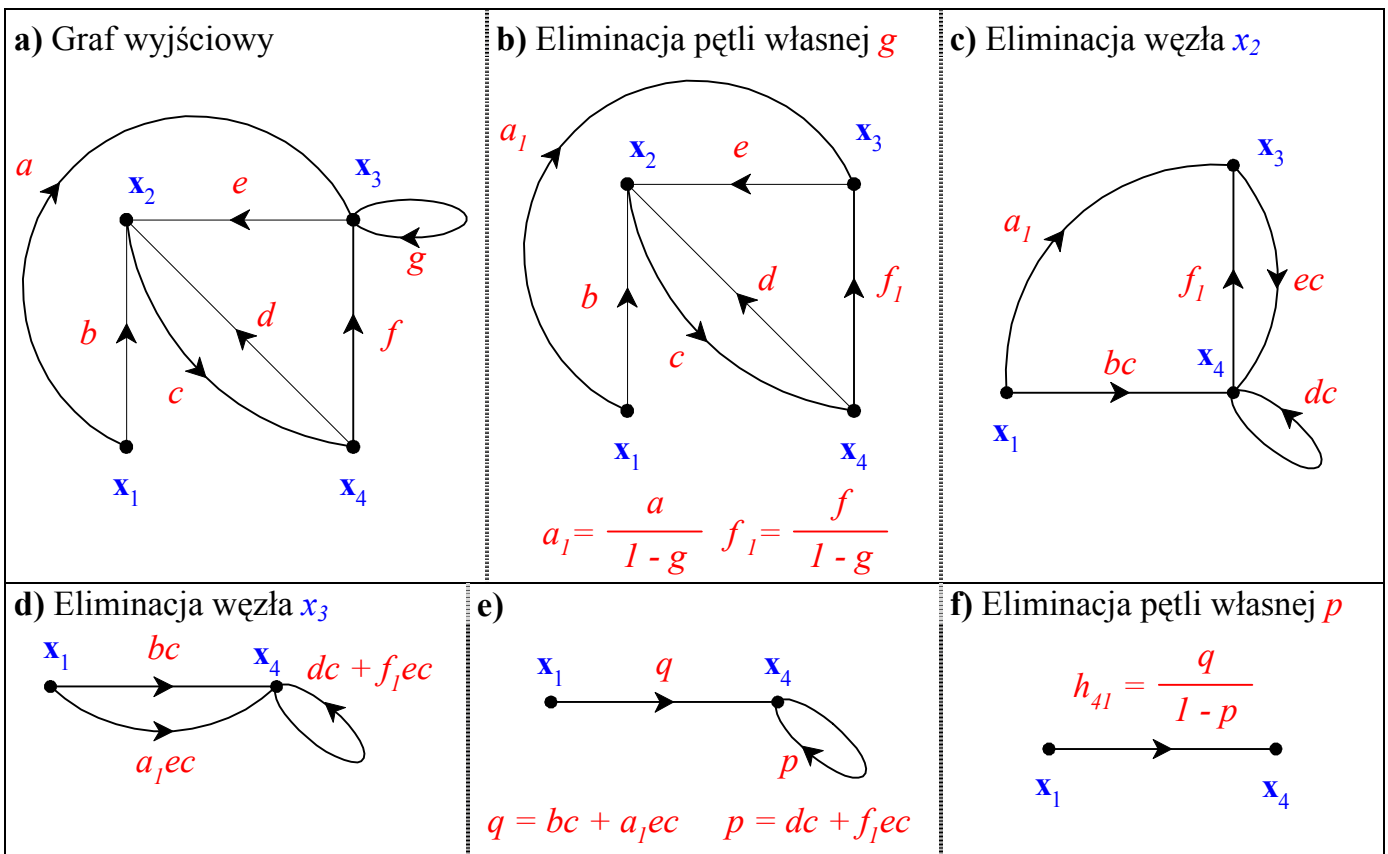
Przykład 4.

Przykład redukcji grafu zawierającego dwie pętle oparte o ten sam węzeł.



Rys. 3.2

Przykład 5.



Rys. 3.3

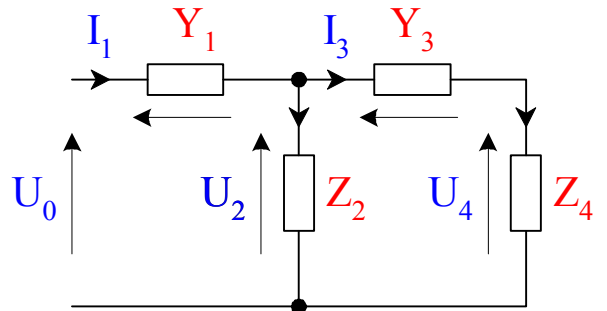
$$h_{41} = \frac{bc + a_1ec}{1 - (dc + f_1ec)} = \frac{bc + \frac{aec}{1-g}}{1 - \left[dc + \frac{fec}{1-g} \right]} = \frac{bc(1-g) + aec}{(1-dc)(1-g) - fec} \quad (3.2)$$

Przykład 6.

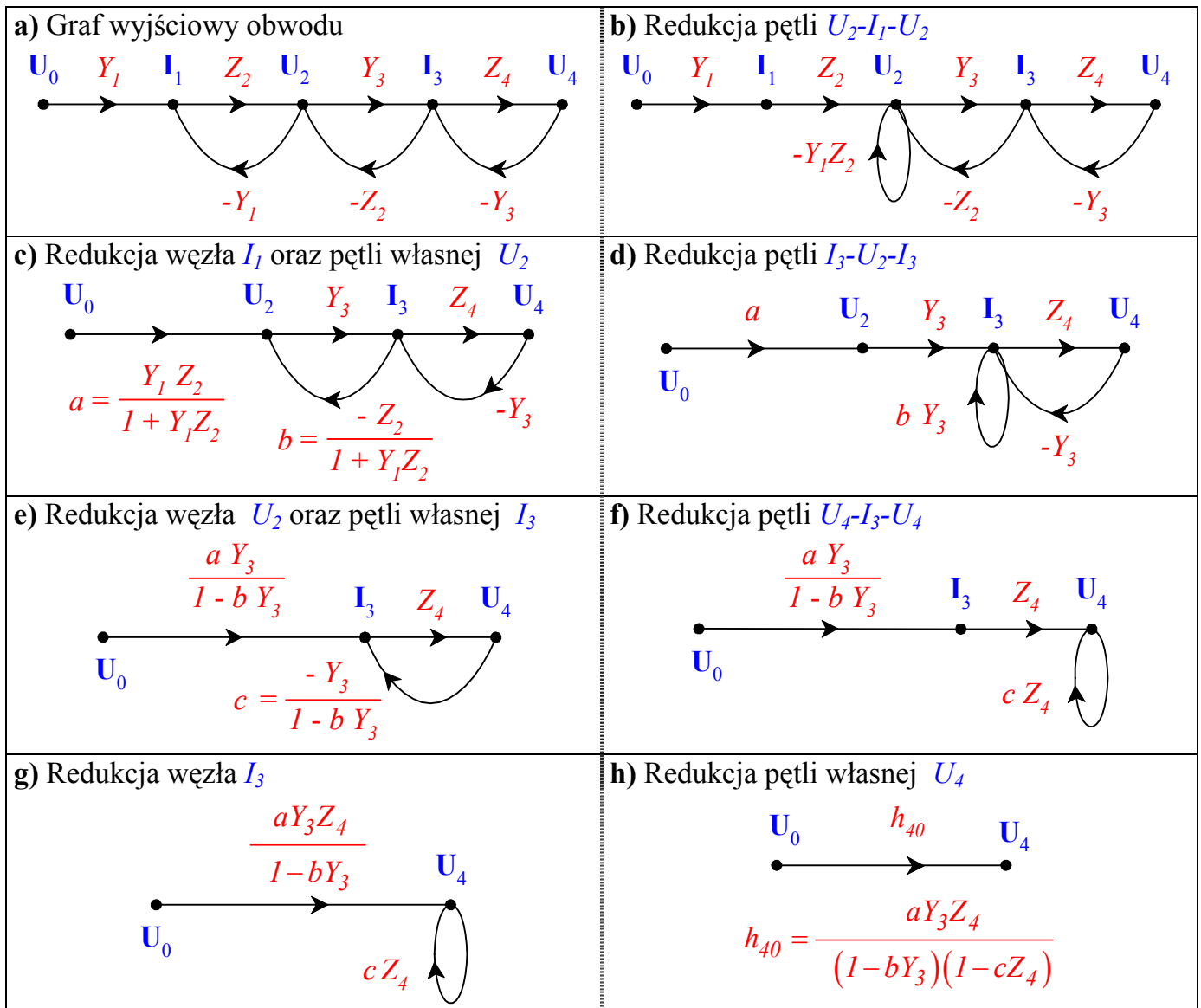
Obwód przedstawiony na Rys. 3.4 opisany jest następującymi równaniami.

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1(U_0 - U_2) & U_2 &= Z_2(I_1 - I_3) \\ I_3 &= Y_3(U_2 - U_4) & U_4 &= Z_4 I_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

na podstawie których tworzymy graf przepływowy (Rys. 3.5a). Stosując metodę przekształcania grafu, wyznaczmy transmitancję napięciową $h_{40} = \frac{U_4}{U_0}$.



Rys. 3.4



Rys. 3.5

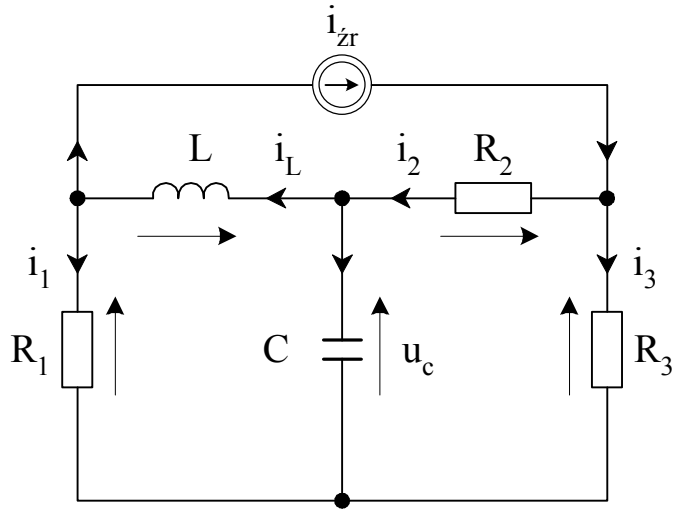
Po uwzględnieniu wprowadzonych podstawień transmitancja napięciowa przyjmie postać

$$h_{40} = \frac{U_4}{U_0} = \frac{Y_1 Y_3 Z_2 Z_4}{(1 + Y_1 Z_2)(1 + Y_3 Z_4) + Y_3 Z_2} \quad (3.4)$$

Przykład 7.

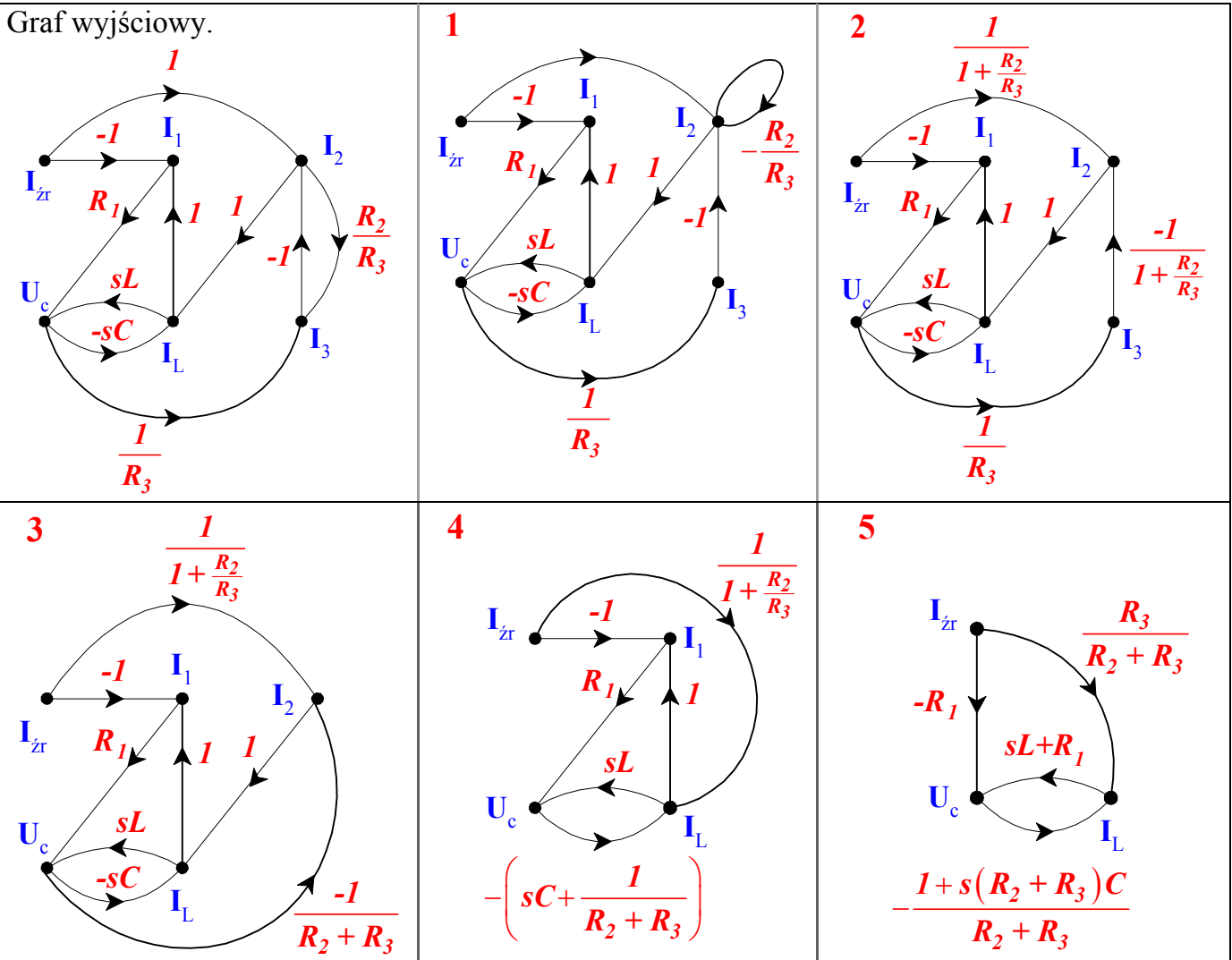
Dla obwodu przedstawionego na Rys. 3.6 narysować graf przepływowy a następnie dokonać redukcji węzłów odpowiadających prądom płynącym przez rezystancje.

$$\begin{aligned}
 I_1(s) &= I_L(s) - I_{zr}(s) \\
 I_2(s) &= I_{zr}(s) - I_3(s) \\
 I_3(s) &= \frac{R_2}{R_3} I_2(s) + \frac{1}{R_3} U_c(s) \\
 I_L(s) &= I_2(s) - sC U_c(s) \\
 U_c(s) &= R_1 I_1(s) + sL I_L(s)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$



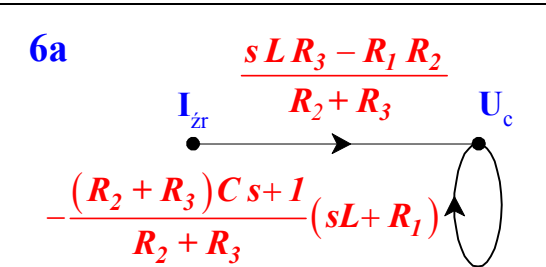
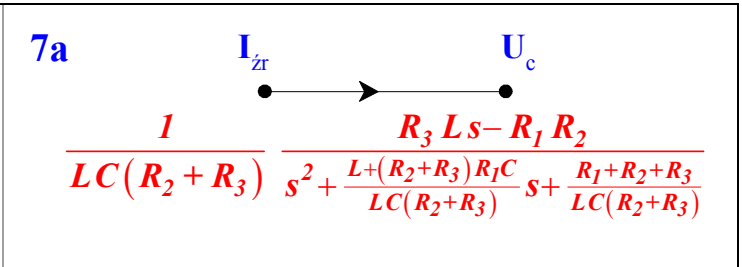
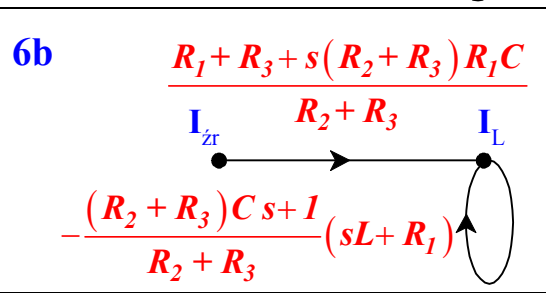
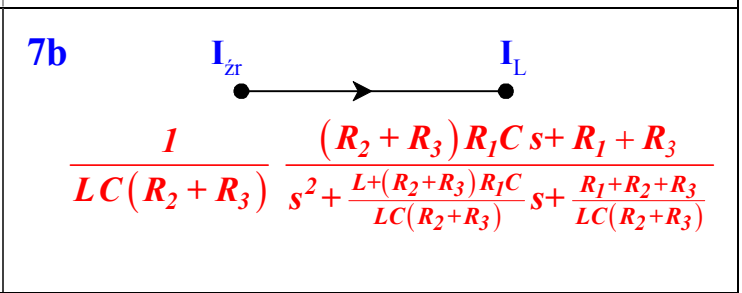
Rys. 3.6

Rozwiązanie:



Rys. 3.7

Na podstawie grafu (5) eliminując węzeł I_L (6a) wyznaczmy transmitancję $I_{\dot{z}r} \rightarrow U_c$ (7a) a następnie eliminując węzeł U_c (6b) otrzymujemy $I_{\dot{z}r} \rightarrow I_L$ (7b).

$U_c(s)$	<p>6a</p> 	<p>7a</p> 
$I_L(s)$	<p>6b</p> 	<p>7b</p> 

Rys. 3.8

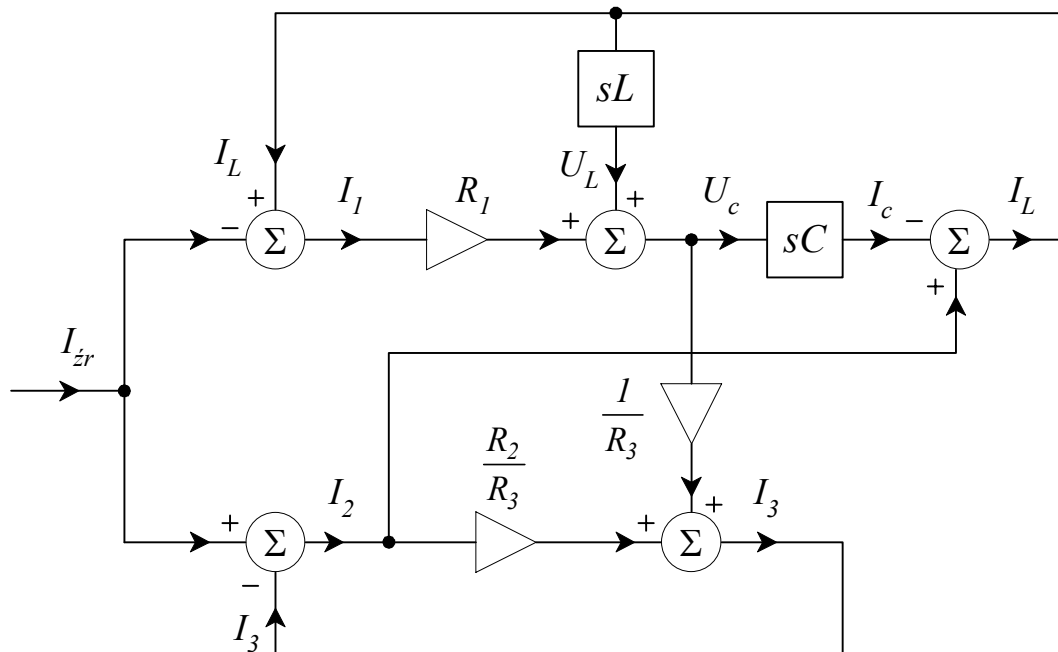
Ostatecznie otrzymujemy:

$$U_c(s) = \frac{1}{LC(R_2 + R_3)} \frac{R_3 L s - R_1 R_2}{s^2 + \frac{L + (R_2 + R_3) R_1 C}{LC(R_2 + R_3)} s + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{LC(R_2 + R_3)}} I_{\dot{z}r}(s) \quad (3.6)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{LC(R_2 + R_3)} \frac{(R_2 + R_3) R_1 C s + R_1 + R_3}{s^2 + \frac{L + (R_2 + R_3) R_1 C}{LC(R_2 + R_3)} s + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{LC(R_2 + R_3)}} I_{\dot{z}r}(s) \quad (3.7)$$

Schemat blokowy utworzony na podstawie grafu obwodu (Rys. 3.6).

(do analizy po zapoznaniu się z materiałami pomocniczymi dotyczącymi schematów blokowych)



Rys. 3.9