9.4. Obwód nierozgałęziony R,L,C

Przeanalizujemy obecnie układ szeregowo połączonych elementów R,L,C, załączony na stałe napięcie U (patrz rys. 9.2). Równanie napięć ma postać

$$u_R + u_L + u_c = U, \text{ czyli } \; R\,i + L\frac{di}{dt} + u_c = U. \qquad (9.21)$$

W równaniu tym występują dwie zmienne zależne: $i(t)$ oraz $u_c(t)$. Wyeliminujemy prąd podstawiając wyrażenie (9.10). Otrzymamy

$$R \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = U. \tag{9.22}$$

Jest to niejednorodne równanie drugiego rzędu, którego rozwiązanie można znaleźć jako sumę całki szczególnej (składowej ustalonej) oraz ogólnej równania jednorodnego (składowa przejściowa, swobodna), $u_c = u_{cu} + u_{cp}$, przy czym u_{cp} spełnia równanie

$$R \cdot C \cdot \frac{du_{cp}}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2u_{cp}}{dt^2} + u_{cp} = 0 \tag{9.23a}$$

po uporządkowaniu

$$\frac{d^2u_{cp}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_{cp}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{cp} = 0. \tag{9.23b}$$

Stosując metodę algebraizacji podstawiamy $u_{cp} = A \cdot e^{rt}$ i po uproszczeniu otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0, \tag{9.24}$$

którego pierwiastki wstawiamy do rozwiązania w postaci ogólnej

$$u_{cp} = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}, \tag{9.25}$$

gdzie A_1, A_2 – stałe całkowania określane na podstawie warunków początkowych.

Pierwiastki równania (9.24)

$$r_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad r_2 = -\frac{R}{LC} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

mogą, jak wiadomo z teorii równań kwadratowych, być liczbami rzeczywistymi, zespolonymi, sprzężonymi lub mieć tę samą wartość (pierwiastek dwukrotny).

Pierwszy przypadek zachodzi, jeżeli

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \quad \text{czyli} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

($\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ jest opornością falową obwodu, patrz rozdział 4.7). W tym przypadku pierwiastki r_1, r_2 są liczbami rzeczywistymi, ujemnymi, przy czym $|r_1| < |r_2|$. Do obliczenia stałych A_1, A_2 posłużymy się wyrażeniem określającym prąd

$$i = C\frac{du_{cp}}{dt} = C \cdot A_1r_1e^{r_1t} + C \cdot A_2r_2e^{r_2t} \tag{9.26}$$

i skorzystamy z obu praw komutacji, odpowiednio dla napięcia na kondensatorze (9.25) i prądu płynącego przez indukcyjność (9.26), przy czym $u_c(0^-) = 0$ i $i(0^-) = 0$ (zerowe warunki początkowe) oraz $u_{cu} = U$ i $i_u = 0$. Stąd znajdujemy

$$u_c(0^-) = u_c(0+) = u_{cu}(0) + u_{cp}(0),$$

a więc $0 = U + A_1 + A_2$, podobnie

$$i(0^-) = i(0+) = i_u(0) + i_p(0)$$

czyli $0 = 0 + C\,A_1 r_1 + C\,A_2 r_2$. Po uporządkowaniu

$$A_1 + A_2 = -U, \qquad r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0,$$

a po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy

$$A_1 = U\,\frac{r_2}{r_1 - r_2}, \qquad A_2 = -U\,\frac{r_1}{r_1 - r_2}$$

i po podstawieniu

$$i_1 = U\,C\,\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right) \tag{9.27}$$

oraz

$$u_c = U + \frac{U}{r_1 - r_2}\left(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}\right). \tag{9.28a}$$

Biorąd pod uwagę, że

$$r_1 - r_2 = 2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{oraz} \quad r_1 r_2 = \frac{1}{LC}$$

i wprowadzająo dla uproszczenia zapisu oznaczenia

$$\frac{R}{2L} = \alpha \qquad \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{L\,C}} = \beta \text{ , otrzymujemy}$$

$$i = \frac{U}{2\beta L}\left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}\right), \tag{9.27b}$$

$$u_c = U + \frac{U}{2\beta}\left(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}\right). \tag{9.28b}$$

<u>Przykład 9.4.</u> Obliczymy przebieg prądu i napięcia na kondensatorze w układzie jak na rys. 9.2, przy danych: $U = 500$ V, $R = 50\,\Omega$, $L = 20$ mH, $C = 50\,\mu F$. Układ spełnia warunek $R > 2\sqrt{L/C} = 40$. Pierwiastki równania charakterystycznego

$$r_1 = -1250 + 750 = -500\ s^{-1}, \quad \tau_1 = 2\ ms,$$
$$r_2 = -1250 - 750 = -2000\ s^{-1}, \quad \tau_2 = 0{,}5\ ms,$$

prąd w obwodzie i napięcie na kondensatorze

$$i(t) = \frac{500\ 10^3}{20\ 1500}\left(e^{-500t} - e^{-2000t}\right) = \frac{50}{3}\left(e^{-500t} - e^{-2000t}\right)$$

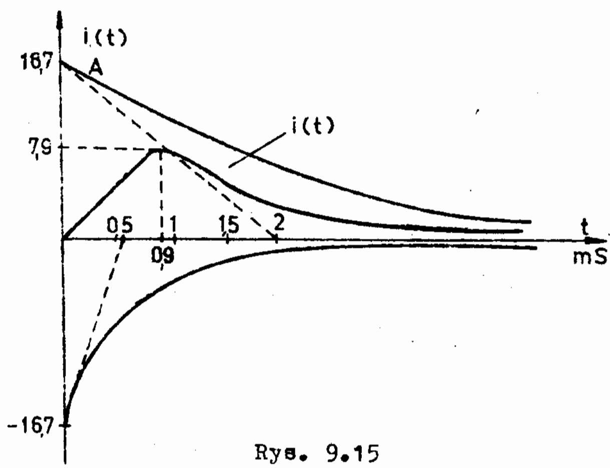
napięcie na kondensatorze

$$u_c(t) = 500 + \frac{500}{1500}\left(500\ e^{-2000t} - 2000\ e^{-500t}\right),$$
$$u_c(t) = 500\left(1 + \frac{1}{3}\ e^{-2000t} - \frac{4}{3}\ e^{-500t}\right).$$

Aby wyznaczyć wartość maksymalną prądu obliczamy

$$\frac{di}{dt} = 0, \text{ skąd } 4 = e^{-1500t}, \quad \text{czyli} \quad t = \frac{\ln 4}{1500} = 0{,}9\ ms$$
$$i_{max} = \frac{50}{3}\left(e^{-0{,}46} - e^{-1{,}85}\right) = \frac{50}{3}\left(0{,}63 - 0{,}16\right) = 7{,}9\ A.$$

Przebieg prądu pokazano na rys. 9.15.



Rys. 9.15

W przypadku, gdy $R < 2\sqrt{L/C}$, pierwiastki równania są liczbami zespolonymi, sprzężonymi: $r_1 = -\alpha + j\omega_0$, $r_2 = -\alpha - j\omega_0$, gdzie

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}.$$

Rozwiązanie ma postać taką samą jak poprzednio (9.26):

$$u_c(t) = U + A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}, \quad i(t) = C(A_1 r_1 e^{r_1 t} + A_2 r_2 e^{r_2 t}).$$

Korzystając z warunków początkowych i biorąc pod uwagę, że $r_1 - r_2 = 2j\omega_0$, $r_1 r_2 = \frac{1}{L \cdot C}$, otrzymamy

$$A_1 = \frac{r_2 U}{2j\omega_0}, \quad A_2 = -\frac{r_1 U}{2j\omega_0},$$

a pamiętając, że $e^{r_1 t} = e^{-\alpha t} e^{j\omega_0 t}$, $e^{r_2 t} = e^{-\alpha t} e^{-j\omega_0 t}$, prąd i napięcie wyrazimy wzorami

$$i(t) = \frac{U}{\omega_0 L} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-\alpha t} = \frac{U}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t \cdot e^{-\alpha t}, \tag{9.29}$$

$$u_c(t) = U - \frac{U}{2j\omega_0}\left[\alpha(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) + j\omega_0(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right] e^{-\alpha t}, \tag{9.30a}$$

zakładając, że

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}} = \cos\phi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}} = \sin\phi = \omega_0\sqrt{LC},$$

otrzymamy ostateczną postać napięcia na kondensatorze

$$u_c(t) = U - \frac{U}{\sin\phi} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \phi). \tag{9.30b}$$

Przykład 9.5. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, $U = 500$ V, $L = 20$ mH, $C = 50\,\mu$F, ale $R = 4\,\Omega$. Układ teraz spełnia nierówność $R < 2\sqrt{L/C} = 40$, w związku z czym

$$\alpha = \frac{4}{2 \cdot 20} \cdot 10^3 = 100\ s^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{10^6 - 10^4} = 100\sqrt{99} = 995\ s^{-1},$$

$$f_0 = 158{,}36\ s^{-1}, \quad T_0 = 6{,}315\ ms.$$

Prąd i napięcie obliczymy z wzorów (9.29) i (9.30b):

$$i(t) = \frac{500}{995 \cdot 20} 10^3 e^{-100t} \sin 995t,$$

$$u_c(t) = 500 - 502{,}5\, e^{-100t} \sin(995t + 84{,}3^\circ).$$

Przebieg prądu przedstawiono na rys. 9.16.

Jako ostatni rozpatrzymy przypadek, gdy $R = 2\sqrt{L/C}$, czyli $r_1 = r_2 = -\frac{R}{2L}$, zwany przypadkiem granicznym. Rozwiązanie można otrzymać z poprzedniego przypadku, zakładając, że $\omega_0 \to 0$, czyli licząc granicę wyrażeń (9.29) i (9.30b) przy $\omega_0 \to 0$ otrzymamy

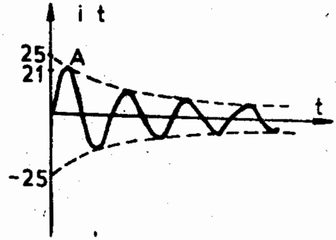
$$i(t) = \frac{U}{L}\, t\, e^{-\alpha t}, \tag{9.31}$$

$$u_c(t) = U - U(\alpha t + 1)e^{-\alpha t}. \tag{9.32}$$

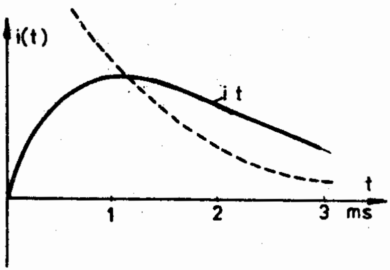
Przykład 9.5a. Dane jak w poprzednich przykładach, z tym, że $R = 2\sqrt{L/C} = 40\,\Omega$. Pierwiastek dwukrotny $r = -\frac{R}{2L} = -1000\ s^{-1}$ ($\tau = 1$ ms). Korzystając z równań (9.31) i (9.32) otrzymamy

$$i(t) = 25 \cdot 10^3 \cdot t \cdot e^{-1000t},$$

$$u_c(t) = 500 - 500(1 + 1000t)e^{-1000t},$$



Rys. 9.16



Rys. 9.17

obliczając $\frac{di}{dt} = 0$ znajdziemy $i_{max} = 9{,}2$ A, przy $t = 1$ ms. Wykres prądu przedstawiono na rys. 9.17.

Jak wynika z powyższej analizy, przebiegi prądu i napięcia zależą od parametrów układu. W przypadku pierwszym i trzecim mają charakter aperiodyczny (od zera poprzez wartość maksymalną dążące asymptotycznie do zera), w przypadku drugim oscylacyjny, tłumiony. Współczynnik tłumienia α zależy od oporności obwodu. W szczególnym (idealnym) przypadku, gdyby $R = 0$, otrzymalibyśmy przebieg oscylacyjny nietłumiony o częstotliwości $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (częstotliwość drgań własnych, rezonansowa obwodu).