

1. Wykładniczy szereg Fouriera funkcji okresowej (sygnału okresowego)<sup>1)</sup>.

$$f(t) = f(t + kT_0) \quad \text{dla dowolnego - rzeczywistego } t \text{ oraz} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{gdzie: } T_0 - \text{okres funkcji,} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (1)$$

2. Wyznaczenie współczynników szeregu wykładniczego  $\underline{c}_k$ .

Mnożąc obustronnie zależność (1) przez  $e^{-jn\omega_0 t}$  a następnie całkując w przedziale czasu odpowiadającym jednemu okresowi funkcji ( $t_1$  - dowolne) możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \left[ e^{-jn\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \right] dt &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu ortogonalności układu funkcji wykładniczych w postaci  $e^{jk\omega_0 t}$

$$\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \delta[k-n] = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = n \\ 0 & \text{dla } k \neq n \end{cases} \quad (\delta[k-n] - \text{delta Kroneckera}) \quad (2)$$

otrzymujemy

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3)$$

Powyższe wyrażenie, ze względu na okresowość funkcji  $f(t)$ , nie zależy od wyboru czasu  $t_1$ . Najczęściej przyjmuje się wartości  $t_1 = 0$  lub  $t_1 = -\frac{T_0}{2}$ .

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{lub} \quad \underline{c}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4)$$

1) Funkcję  $f(t)$  można przedstawić w pewnym przedziale w postaci szeregu Fouriera, jeżeli spełnia ona w tym przedziale warunek Dirichleta tzn. gdy przedział ten można rozłożyć na skończoną liczbę podprzedziałów, w których funkcja jest monotoniczna i ograniczona.

Można udowodnić, że szereg Fouriera funkcji  $f(t)$ , ciągłej w przedziale domkniętym  $[0, T_0]$ , jest jednostajnie zbieżny do tej funkcji dla dowolnego  $t$ , należącego do tego przedziału (co w przypadku sygnału okresowego o okresie  $T_0$  oznacza zbieżność dla dowolnego  $-\infty < t < \infty$ ). W przypadku funkcji nieciągłej, zbieżność jednostajna ma miejsce w każdym podprzedziale domkniętym, w którym funkcja jest ciągła. W punktach nieciągłości (pierwszego rodzaju) szereg Fouriera zbieżny jest do wartości równej średniej arytmetycznej lewo- i prawostronnej granicy funkcji w danym punkcie tj.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t_0} = \frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2} \quad \text{gdzie: } t_0 - \text{punkt nieciągłości pierwszego rodzaju}$$

Problem przedstawiania funkcji za pomocą szeregu Fouriera można rozpatrywać także jako zagadnienie aproksymacyjne. Dla danej - rzeczywistej funkcji  $f(t)$ , określonej w przedziale domkniętym  $[t_1, t_2]$  należy dobrać współczynniki  $\underline{c}_k$  tak, aby minimalizowały one funkcjonal  $Q_N$ , nazywany kryterium błędu średniokwadratowego

$$Q_N(\underline{c}_0, \underline{c}_{\pm 1}, \underline{c}_{\pm 2}, \dots, \underline{c}_{\pm N}) = \int_{t_1}^{t_2} \left( f(t) - \sum_{k=-N}^N \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \right)^2 dt \quad \left( \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \right) \quad (5)$$

Obliczamy pochodne cząstkowe  $\frac{\partial Q_N}{\partial \underline{c}_{-n}}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) i następnie przyrównujemy je do zera

$$\frac{\partial Q_N}{\partial \underline{c}_{-n}} = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left( f(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( f(t) e^{-jn\omega_0 t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \right) dt = 0$$

Stąd po uwzględnieniu (2), otrzymujemy analogiczną do (3) zależność

$$\underline{c}_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Możemy zatem stwierdzić, że współczynniki Fouriera zapewniają najlepszą (wg kryterium średniokwadratowego) aproksymację sygnału za pomocą przebiegów wykładniczych<sup>1),2)</sup> W przypadku, gdy  $N \rightarrow \infty$  to  $Q_N \rightarrow 0$ <sup>3),4)</sup>.

3. Jeżeli  $f(t)$  jest funkcją rzeczywistą ( $f(t) = f^*(t)$ ) to:

$$\underline{c}_{-k} = \underline{c}_k^* \quad (6)$$

Dowód

I sposób

$$f^*(t) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \right\}^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

uwzględniając (1)  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t}$  czyli  $\underline{c}_{-k}^* = \underline{c}_k$  c.n.d.

II sposób

$$\underline{c}_k^* = \left\{ \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right\}^* = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f^*(t) e^{jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-j(-k)\omega_0 t} dt = \underline{c}_{-k}$$

<sup>1)</sup> Ogólnie - w bazie ortogonalnej.

<sup>2)</sup> Dana aproksymacja obowiązuje wyłącznie w przedziale  $(t_1, t_2)$ . Poza tym przedziałem, szereg Fouriera zbieżny jest do funkcji okresowej  $g(t)$ , która jedynie w rozpatrywanym przedziale pokrywa się z funkcją  $f(t)$ . Oczywiście może istnieć wiele funkcji  $g(t)$  posiadających wspomnianą własność. Dlatego konstruując funkcję  $g(t)$  należy zwracać uwagę przede wszystkim na to, aby w swoim okresie posiadała ona możliwie najmniejszą liczbę punktów nieciągłości.

<sup>3)</sup> Ponieważ sygnały wykładnicze  $e^{jk\omega_0 t}$  tworzą zbiór zupełny.

<sup>4)</sup> W tym sensie należy rozumieć także równość (1).

#### 4. Widmo amplitudowo - fazowe funkcji okresowej.

Współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera określają tzw. dyskretne widmo zespolone funkcji okresowej

$$\underline{c}_k = \left| \underline{c}_k \right| e^{j\phi_k} \quad -\infty < k < \infty \quad (7)$$

zawierające dyskretne widmo amplitudowe  $\left| \underline{c}_k \right|$  oraz dyskretne widmo fazowe  $\phi_k$ .

W przypadku sygnałów rzeczywistych  $\underline{c}_{-k} = \underline{c}_k^*$ . Wynika stąd, że widmo amplitudowe jest parzystą funkcją  $k$  natomiast widmo fazowe jest funkcją nieparzystą

$$\left| \underline{c}_{-k} \right| = \left| \underline{c}_k \right|, \quad \phi_{-k} = -\phi_k \quad (8)$$

#### 5. Trygonometryczny szereg Fouriera.

Przekształćmy szereg (1) uwzględniając wzór Eulera:  $e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k [\cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\underline{c}_k \cos(k\omega_0 t) + \underline{c}_{-k} \cos(-k\omega_0 t)] + \\ &+ j \sum_{k=1}^{\infty} [\underline{c}_k \sin(k\omega_0 t) + \underline{c}_{-k} \sin(-k\omega_0 t)] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \cos(k\omega_0 t) + j \sum_{k=1}^{\infty} [\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \sin(k\omega_0 t) \end{aligned}$$

Oznaczając

$$a_k = \underline{c}_k + \underline{c}_{-k} \quad \text{oraz} \quad b_k = j [\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \quad (9)$$

otrzymujemy

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (10)$$

Wykorzystując (4) i (9) można określić współczynniki  $a_k$  i  $b_k$  na podstawie przebiegu  $f(t)$ <sup>1)</sup>

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Zależności określające współczynniki szeregu trygonometrycznego mogą być wyznaczone również na drodze minimalizacji błędu średniokwadratowego (5). W tym przypadku mamy do czynienia z sygnałami bazowymi w postaci  $\sin(k\omega_0 t)$ ,  $\cos(k\omega_0 t)$ , które także tworzą bazę ortogonalną (ortonormalną) tj.

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \begin{cases} 1 & \text{dla } k = n \\ 0 & \text{dla } k \neq n \end{cases}, & \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \begin{cases} 1 & \text{dla } k = n \\ 0 & \text{dla } k \neq n \end{cases} \\ \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= 0 \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja  $f(t)$  jest rzeczywista to współczynniki  $a_k$  i  $b_k$  są także rzeczywiste, stanowią one odpowiednio podwojoną część rzeczywistą i urojoną współczynników szeregu wykładniczego.

Na podstawie (6) i (9) możemy w przypadku funkcji rzeczywistej, napisać

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_k\} \quad \text{oraz} \quad b_k = -2 \operatorname{Im}\{\underline{c}_k\} \quad (12)$$

stąd

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2} [a_k - j b_k] \quad (13)$$

### 6. Inna postać szeregu trygonometrycznego dla sygnału rzeczywistego.

Przekształcamy szereg wykładniczy z uwzględnieniem (6)

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} + \underline{c}_{-k} e^{-jk\omega_0 t}] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} + (\underline{c}_k e^{jk\omega_0 t})^*] = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_k e^{jk\omega_0 t}\} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_k |e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)}|\} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 |\underline{c}_k| \cos(k\omega_0 t + \phi_k) = \\ &= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{k_{\max}} \cos(k\omega_0 t + \phi_k) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} F_{k_{sk}} \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned} \quad (14)$$

Zmieniając odpowiednio fazy harmoniczných możemy zapisać funkcję  $f(t)$  także za pomocą szeregu "sinusowego"

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} F_{k_{sk}} \sin(k\omega_0 t + \Psi_k) \quad (15)$$

$$\text{gdzie: } F_{k_{sk}} = \sqrt{2} |\underline{c}_k|, \quad \Psi_k = \arg\{\underline{c}_k\}, \quad \Psi_k = \phi_k + \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

### 7. Szereg Fouriera funkcji parzystej: $f(-t) = f(t)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_{-k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \underline{c}_{-k} = \underline{c}_k$$

uwzględniając (9) otrzymujemy

$$b_k = 0 \quad (17)$$

czyli

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) \quad (18)$$

8. Szereg Fouriera funkcji nieparzystej:  $f(-t) = -f(t)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{-jk\omega_0 t} = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_{-k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-\underline{c}_k) e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \underline{c}_{-k} = -\underline{c}_k$$

uwzględniając (9) otrzymujemy

$$a_k = 0 \tag{19}$$

czyli

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \tag{20}$$

9. Szereg Fouriera funkcji antysymetrycznej:  $f\left(t \pm \frac{T_0}{2}\right) = -f(t)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 \left(t + \frac{T_0}{2}\right)} &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{j(k\omega_0 t + k\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-\underline{c}_k) e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow \\ &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k (-1)^k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-\underline{c}_k) e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

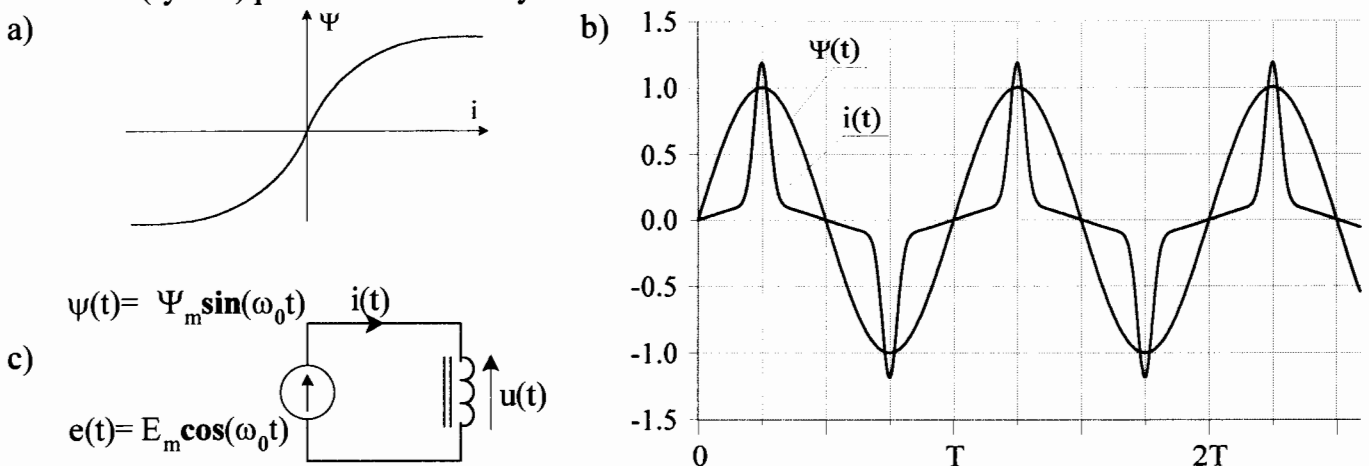
stad

$$(-1)^k \underline{c}_k = -\underline{c}_k \Rightarrow \underline{c}_{2n} = 0 \quad n = 0, \pm 1, \dots \tag{21}$$

czyli

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_{2n+1} e^{j(2n+1)\omega_0 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_{2n+1} \cos(2n+1)\omega_0 t + b_{2n+1} \sin(2n+1)\omega_0 t\} \tag{22}$$

Sygnaly posiadajace powyzzsza wlasciwosc wystepuja m.in. w ukkladach zawierajacych elementy nieliniowe o nieparzystych charakterystykach, jak np. dlawiki z rdzeniem ferromagnetycznym (rys.1). Jezeli strumien magnetyczny (napiecie) posiada przebieg sinusoidalny (cosinusoidalny) to w prądzie wystapia wyłacznie harmoniczne nieparzyste: 1, 3, 5 ... . Przykładowy przebieg strumienia magnetycznego oraz prądu płynącego przez dlawik z rdzeniem ferromagnetycznym w obwodzie (rys.1c) przedstawiono na rys.1b.

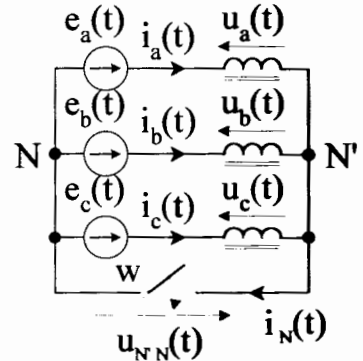


rys.1

Interesujace zjawiska wystepuja w ukkladach trójfazowych zawierajacych wspomniane elementy nieliniowe. Rozważmy obwód przedstawiony na rys.2, w którym napiecia  $e_a(t) = E_m \sin(\omega_0 t)$

oraz  $e_b(t) = e_a\left(t - \frac{T_0}{3}\right)$ ,  $e_c(t) = e_a\left(t - \frac{2T_0}{3}\right)$  tworzą układ symetryczny. Ze względu na nieparzystą

charakterystykę elementów, przebiegi prądów i napięć fazowych zawierają wyłącznie harmoniczne nieparzyste, przy czym w zależności od stanu wyłącznika 'w', harmoniczne określonych rzędów mogą się zerować. Uwarunkowane jest to rodzajem symetrii przebiegów danej harmonicznej. W szczególności (uwzględniając także harmoniczne parzyste) układy symetryczne zgodne tworzą harmoniczne: 1, 4, 7, ..., układy przeciwnie: 2, 5, 8, ..., natomiast: 3, 6, 9, ... tworzą układy zerowe. Na tej podstawie można stwierdzić, że przy otwartym wyłączniku 'w' w prądach fazowych nie wystąpią harmoniczne tworzące układy zerowe tzn. podzielne przez 3. W napięciach fazowych obecne są harmoniczne:



rys.2

1, 3, 9, ..., natomiast w napięciu  $u_{N'N}(t)$ : 3, 9, 15, ... . W układzie z zamkniętym wyłącznikiem, w prądach fazowych występują wszystkie harmoniczne nieparzyste, natomiast w prądzie  $i_N(t)$  tylko podzielne przez 3 czyli: 3, 9, 15, ... . Napięcia fazowe zawierają w tym przypadku oczywiście tylko harmoniczną pierwszą.

### 10. Współczynniki szeregu Fouriera funkcji przesuniętych na osi czasu.

Przedstawione własności szeregu Fouriera dla funkcji parzystej, nieparzystej oraz antysymetrycznej można wykorzystywać przy obliczaniu współczynników szeregu, dostosowując sygnał tak, aby posiadał określoną własność. Przesunięcie sygnału na osi czasu nie ma wpływu na widmo amplitudowe, a jedynie na widmo fazowe<sup>1)</sup>.

Jeżeli  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$  i  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$  oraz  $g(t) = f(t - t_0)$

to  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t}$

stąd  $d_k = c_k e^{-jk\omega_0 t_0}$  (23)

Czyli  $|d_k| = |c_k|$ ,  $\arg\{d_k\} = \arg\{c_k\} - k\omega_0 t_0$  (24)

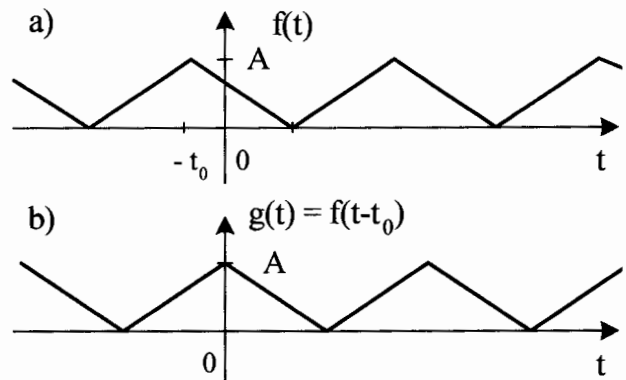
Na przykład współczynniki szeregu Fouriera sygnału  $f(t)$  (rys.3) można wyznaczyć, po uwzględnieniu (23), na podstawie współczynników sygnału  $g(t) = f(t - t_0)$ .

Sygnał  $g(t)$  ma przebieg parzysty, może być więc zapisany w postaci (18)

$$g(t) = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos(k\omega_0 t)$$

stąd, na podstawie (14) oraz (23)

$$f(t) = g(t + t_0) = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \cos(k\omega_0 t + k\omega_0 t_0)$$



rys.3

<sup>1)</sup> Podobnie jak w przekształceniu Fouriera  $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

### 11. Różniczkowanie szeregu Fouriera - Szereg Fouriera dystrybucji okresowych.

Jeżeli funkcja okresowa jest ciągła oraz posiada pochodną spełniającą warunki Dirichleta to istnieje szereg Fouriera pochodnej o współczynnikach wynikających ze zróżniczkowania prawej strony (1) 'wyraz po wyrazie' (por. przypis na str. 1).

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k^{(1)} e^{jk\omega_0 t} \quad (25)$$

gdzie:  $\underline{c}_k^{(1)}$  współczynniki szeregu wykładniczego pochodnej sygnału.

Stosując dla pochodnej  $f'(t)$  wzór (4) otrzymujemy

$$\underline{c}_k^{(1)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = jk\omega_0 \underline{c}_k = jk\omega_0 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (26)$$

Jeżeli wyższe pochodne sygnału spełniają analogiczne warunki to współczynniki ich szeregów można wyznaczać na podstawie podobnych zależności

$$\underline{c}_k^{(n)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f^{(n)}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = (jk\omega_0)^n \underline{c}_k \quad (27)$$

Warto zwrócić uwagę na to, że wyrażenia (26) i (27) otrzymać można także całkując wielokrotnie przez części całkę (4). Na przykład dla  $n = 1$  otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T_0} \left[ f(t) \left( \frac{-1}{jk\omega_0} \right) e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^{T_0} - \left( \frac{-1}{jk\omega_0} \right) \int_0^{T_0} f'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{jk\omega_0} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f'(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (28)$$

Stąd dla  $k \neq 0^1)$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{jk\omega_0} \underline{c}_k^{(1)} \quad (29)$$

Stosując identyczne rozumowanie, można wyrazić całkę zawierającą  $n$ -tą pochodną funkcji  $f(t)$ , za pomocą całki z pochodną  $n-1$ . Czyli

$$\underline{c}_k^{(n)} = \frac{1}{jk\omega_0} \underline{c}_k^{(n-1)} \quad (30)$$

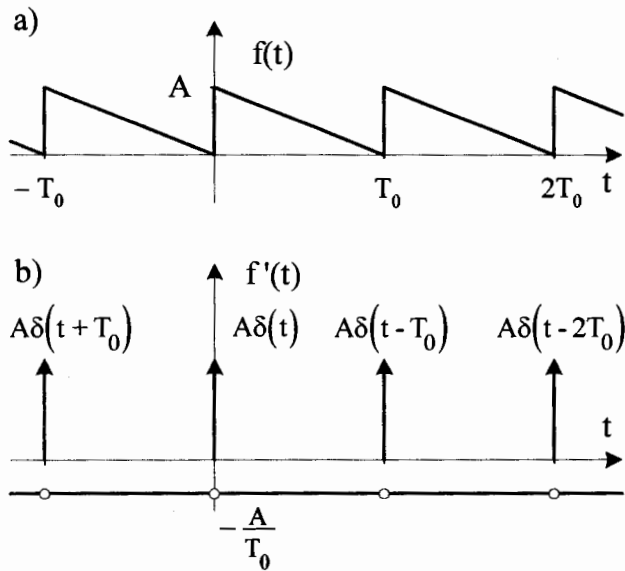
Ogólnie więc

$$\underline{c}_k = \frac{1}{jk\omega_0} \underline{c}_k^{(1)} = \frac{1}{(jk\omega_0)^2} \underline{c}_k^{(2)} = \dots = \frac{1}{(jk\omega_0)^N} \underline{c}_k^{(N)} = \dots \quad (k \neq 0) \quad (31)$$

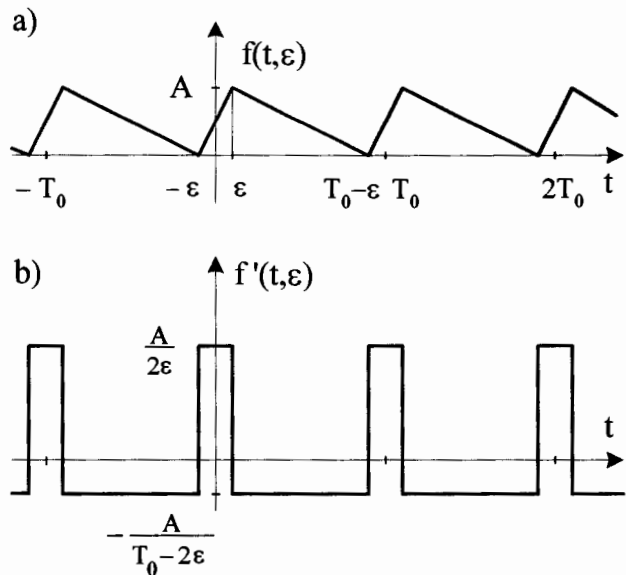
Jeżeli sygnał posiada punkty nieciągłości pierwszego rodzaju to związki (31) pozostają dalej aktualne. Jednakże przeprowadzane tutaj działania należy rozpatrywać w sensie dystrybucyjnym.

<sup>1)</sup> Różniczkowanie eliminuje składową stałą funkcji stanowiącą jednocześnie wartość średnią, obliczaną w jednym okresie.

Jak wiadomo<sup>1)</sup> pochodna dystrybucyjna sygnału nieciągłego, posiada w każdym punkcie nieciągłości pierwszego rodzaju tzw. impuls 'delta Diraca'. Z tego powodu nie jest możliwe utworzenia szeregu Fouriera, pochodnej takiego sygnału, w oparciu o warunki Dirichleta. Musimy zatem postąpić 'tradycyjnie'; tzn. skorzystać z funkcyjnej aproksymacji dystrybucji 'delta Diraca' i następnie dokonać odpowiedniego przejścia granicznego. Rozważmy nieciągły sygnał okresowy (rys.4a) oraz jego pochodną dystrybucyjną, przedstawioną na rys.4b.



rys.4



rys.5

W celu zbadania własności szeregu pochodnej utwórzmy sygnał pomocniczy  $f(t, \varepsilon)$  (rys.5a). Pochodna  $f'(t, \varepsilon)$  (rys.5b) spełnia warunki Dirichleta, może być więc przedstawiona w postaci szeregu Fouriera,

$$f'(t, \varepsilon) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(l)}(\varepsilon) e^{jk\omega_0 t} \quad (32)$$

którego współczynniki ( $k \neq 0$ ) wynoszą

$$\begin{aligned} c_k^{(l)}(\varepsilon) &= \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{A}{2\varepsilon} e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_{\varepsilon}^{T_0 - \varepsilon} \left( -\frac{A}{T_0 - 2\varepsilon} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] = \\ &= \frac{A}{T_0} \left\{ \frac{1}{j2k\omega_0 \varepsilon} \left[ e^{jk\omega_0 \varepsilon} - e^{-jk\omega_0 \varepsilon} \right] + \frac{1}{jk\omega_0 (T_0 - 2\varepsilon)} \left[ e^{-jk\omega_0 (T_0 - \varepsilon)} - e^{-jk\omega_0 \varepsilon} \right] \right\} = \\ &= \frac{A}{T_0} \left\{ \frac{\sin(k\omega_0 \varepsilon)}{k\omega_0 \varepsilon} + 2 \frac{\sin(k\omega_0 \varepsilon)}{k\omega_0 (T_0 - 2\varepsilon)} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy

$$c_k^{(l)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_k^{(l)}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A}{T_0} \left\{ \frac{\sin(k\omega_0 \varepsilon)}{k\omega_0 \varepsilon} + 2 \frac{\sin(k\omega_0 \varepsilon)}{k\omega_0 (T_0 - 2\varepsilon)} \right\} = \frac{A}{T_0} \quad (c_0^{(l)} = 0) \quad (34)$$

<sup>1)</sup> Materiały Pomocnicze 6 - Wybrane Zagadnienia Teorii Liniowych Układów - wzór (14)



Uwzględniając dystrybucyjną granicę  $f'(t, \varepsilon)$  dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ , wyrażamy ją za pomocą szeregu zbieżnego w sensie dystrybucyjnym<sup>1)</sup>

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f'(t, \varepsilon) \Rightarrow -\frac{A}{T_0} + A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = -\frac{A}{T_0} + \frac{A}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad (35)$$

Postępując podobnie, można wyznaczyć szereg drugiej i wyższych pochodnych. Otrzymujemy wówczas szeregi, których współczynniki wynikają z dystrybucyjnego różniczkowania (35).

Przykładowo szeregi dla drugiej oraz  $m$ -tej pochodnej mają postać

$$f''(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(t - nT_0) = \frac{A\omega_0}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk e^{jk\omega_0 t}; \quad f^{(m)}(t) = \frac{A}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jk\omega_0)^{m-1} e^{jk\omega_0 t} \quad (36)$$

Oczywiście wyznaczanie szeregów wyższych pochodnych na podstawie szeregu sygnału wyjściowego jest często bezcelowe. Istotniejsze z praktycznego punktu widzenia jest działanie odwrotne, ujęte wzorem (31).

Jednakże nie w każdym przypadku metoda ta jest efektywna, ponieważ różniczkowanie może prowadzić do bardziej złożonych wyrażeń niż opis sygnału pierwotnego. Jeżeli jednak, dla zadanego przebiegu  $f(t)$ , istnieje możliwość utworzenia liniowego równania różnicowo-różniczkowego w postaci

$$\sum_{n=0}^N \lambda_n f^{(n)}(t - t_n) = g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{d}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (37)$$

gdzie:  $g(t)$  - sygnał o znanym szeregu Fouriera,

to wykorzystując (23) i (27), po niewielkich przekształceniach otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^N \lambda_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k^{(n)} e^{-jk\omega_0 t_n} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^N (jk\omega_0)^n \lambda_n e^{-jk\omega_0 t_n} \right] \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{d}_k e^{jk\omega_0 t}$$

Porównując współczynniki przy funkcjach wykładniczych, występujących po obu stronach równania wyznaczamy współczynniki szeregu sygnału wyjściowego

$$\underline{c}_k = \frac{\underline{d}_k}{\sum_{n=0}^N (jk\omega_0)^n \lambda_n e^{-jk\omega_0 t_n}} \quad (38)$$

Stosowanie omówionej metody jest szczególnie efektywne w przypadkach, gdy kilkukrotne różniczkowanie sygnału prowadzi do sygnału zawierającego wyłącznie składniki dystrybucyjne<sup>2)</sup>. Do wyznaczenia współczynników szeregu Fouriera sygnału wyjściowego można wykorzystać wówczas bezpośrednio zależność (31). Należy jednak pamiętać, aby całkowanie wyrażeń zawierających składniki dystrybucyjne było przeprowadzane w przedziale równym dokładnie okresowi sygnału (np. od 0- do  $T_0$  -). (Praktyczne zastosowanie przedstawionej metody zaprezentowano w przykładach 2 i 3, zamieszczonych w dalszej części opracowania.)

<sup>1)</sup> Warunkiem koniecznym (lecz nie zawsze wystarczającym) zbieżności w zwykłym sensie szeregu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$$

jest to, aby  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |f_n| = 0$ .

<sup>2)</sup> Sytuacja taka ma miejsce wówczas, gdy sygnał opisany jest przedziałami, za pomocą wielomianów.

## 12. Wzór Parsevala dla funkcji okresowych.

Założmy, że :  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t}$  oraz  $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{d}_k e^{jk\omega_0 t}$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) g^*(t) dt &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{d}_n e^{jn\omega_0 t} \right)^* dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \underline{d}_n^* \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \underline{d}_k^* \end{aligned}$$

Ostatnia równość prowadzi do tzw. wzoru Parsevala dla przebiegów okresowych

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) g^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \underline{d}_k^* \quad (39)$$

W szczególnym przypadku, gdy  $f(t) = g(t)$  to:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) f^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \underline{c}_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\underline{c}_k|^2 \quad (40)$$

Jeżeli  $f(t)$  jest sygnałem rzeczywistym to:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\underline{c}_k|^2 \quad (41)$$

Całka z lewej strony zależności (41) wyraża kwadrat wartości skutecznej, jak również wartość średnią mocy sygnału okresowego. Prawa strona natomiast przedstawia tę moc jako sumę mocy poszczególnych składników wykładniczych o zespolonych amplitudach  $\underline{c}_k$ .

Oznaczając

$$F_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |f(t)|^2 dt} \quad \text{otrzymujemy} \quad F_{sk}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\underline{c}_k|^2 \quad (42)$$

Po uwzględnieniu (16), wartość skuteczną rzeczywistego przebiegu okresowego można wyrazić za pomocą wartości skutecznych jego harmonicznich

$$F_{sk}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\underline{c}_k|^2 = \underline{c}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ |\underline{c}_k|^2 + |\underline{c}_{-k}|^2 \right] = \underline{c}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 |\underline{c}_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k sk}^2 \quad (43)$$

Stąd, wartość skuteczną sygnału okresowego można ostatecznie przedstawić w postaci

$$F_{sk} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} F_{k sk}^2} \quad (44)$$

**Wniosek: Wartości skuteczna rzeczywistego przebiegu okresowego równy jest pierwiastkowi z sumy kwadratów wartości skutecznych jego harmonicznich.**

13. Parametry charakteryzujące rzeczywisty przebieg okresowy.

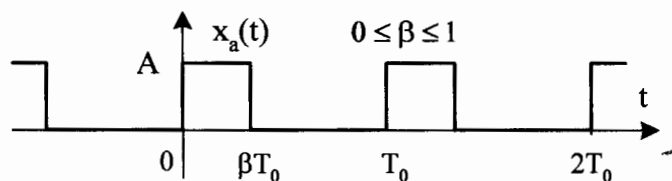
Wartość średnia sygnału wyprostowanego	$F_{sr} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt$ (45)	Wartość skuteczna	$F_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f^2(t) dt}$ (46)
Współczynnik szczytu	$k_s = \frac{F_{max}}{F_{sk}}$ (47)	Współczynnik kształtu	$k_k = \frac{F_{sk}}{F_{sr}}$ (48)
Współczynnik zawartości k-tej harmonicznej	$h_k = \frac{F_{k_{sk}}}{F_{1_{sk}}}$ (49)	Współczynnik zawartości harmonicznych	$h = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} h_k^2}$ (50)

14. Rozwinięcia w szereg Fouriera wybranych sygnałów.

Przykład 1. Sygnał prostokątny -  $x_a(t)$ .

Obliczamy współczynniki szeregu wykładniczego

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\beta T_0} A e^{-jk\omega_0 t} dt =$$



rys.6

$$= \frac{1}{T_0} \left( \frac{A}{-jk\omega_0} \right) e^{-jk\omega_0 t} \Big|_0^{\beta T_0} = -j \frac{A}{2k\pi} \left[ 1 - e^{-j2k\pi\beta} \right] = \frac{A}{2k\pi} \left[ -\sin(2k\pi\beta) - j(1 - \cos(2k\pi\beta)) \right] \quad (51)$$

Wartość średnia sygnału tj. współczynnik  $c_0$  wynosi

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{\beta T_0} A dt = A\beta \quad (52)$$

Uwzględniając związki między współczynnikami szeregu wykładniczego i trygonometrycznego (12) wyznaczamy współczynniki  $a_k$  i  $b_k$

$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\} = -\frac{A}{k\pi} \sin(2k\pi\beta), \quad b_k = -2 \operatorname{Im}\{c_k\} = \frac{A}{k\pi} (1 - \cos(2k\pi\beta)) \quad (53)$$

Wykorzystując szereg trygonometryczny sygnał  $x_a(t)$  można zapisać następująco

$$x_a(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\frac{\sin(2k\pi\beta)}{k} \cos(k\omega_0 t) + \frac{1 - \cos(2k\pi\beta)}{k} \sin(k\omega_0 t) \right] \quad (54)$$

W szczególnym przypadku, dla  $\beta = 0.5$ , współczynniki szeregu trygonometrycznego wynoszą

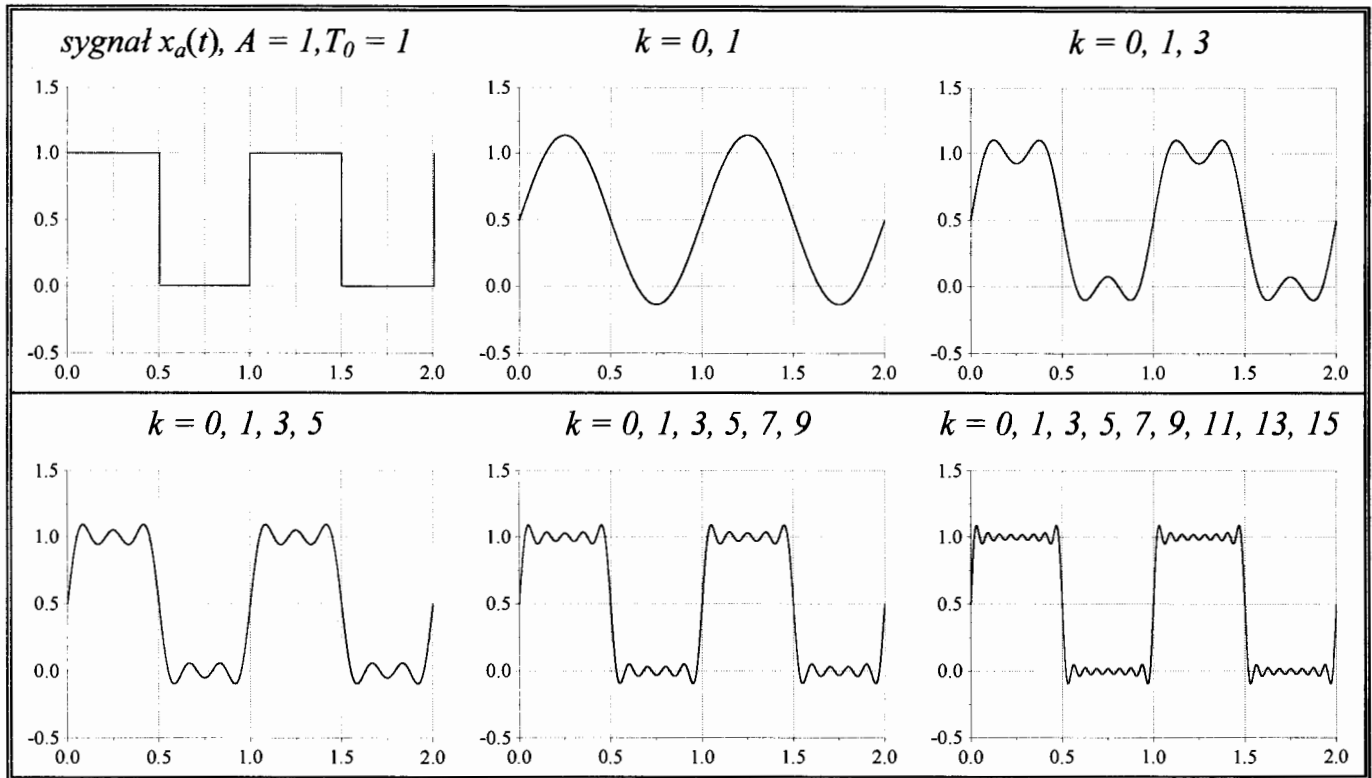
$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}, \quad a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{A}{k\pi} [1 - (-1)^k] \text{ tzn. } b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{2A}{(2n-1)\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (55)$$

Czyli

$$x_a(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\omega_0 t]}{2n-1} = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left( \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right) \quad (56)$$

Przedstawione niżej wykresy stanowią ilustrację zagadnienia aproksymacji sygnału wielomianem trygonometrycznym.



rys.7

Występujące wokół punktów nieciągłości sygnału oscylacje wynikają z niedokładności aproksymacji za pomocą skończonego szeregu<sup>1)</sup>. Ich wielkość zależy od liczby występujących w wielomianie harmonicznych. i może reprezentować błąd aproksymacji. Do oszacowania normy tego błędu<sup>2)</sup> można wykorzystać wzór Parsevala

$$\|\varepsilon\|_N^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[ x(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega_0 t} \right]^2 dt = X_{sk}^2 - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 = X_{sk}^2 - \sum_{k=0}^N X_{k,sk}^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} X_{k,sk}^2 \quad (57)$$

W rozpatrywanym przypadku, dla harmonicznych  $0 \leq k \leq 15$  otrzymujemy  $\|\varepsilon\|_{15}^2 \approx 0.00632 A^2$ .

Błąd względny przy  $X_{sk}^2 = 0.5$  ( $A = 1$ ) wynosi  $\delta_{15} \approx 0.013$ . Oznacza to, że całkowita moc pozostałych harmonicznych ( $k > 15$ ) stanowi ok. 1.3 % mocy sygnału.

<sup>1)</sup> Z występowaniem oscylacji wokół punktu nieciągłości sygnału związany jest tzw. efekt Gibbsa, polegający na tym, że wartość początkowego maksimum (patrząc od strony punktu nieciągłości) nie maleje do zera, gdy liczba składników w szeregu dąży do nieskończoności, przy czym punkt, w którym występuje to maksimum dąży monotonicznie do punktu nieciągłości. Graniczna wartość 'podskoku' aproksymacji wynosi ok. 9% wartości różnicy  $f(t_0+) - f(t_0-)$ .

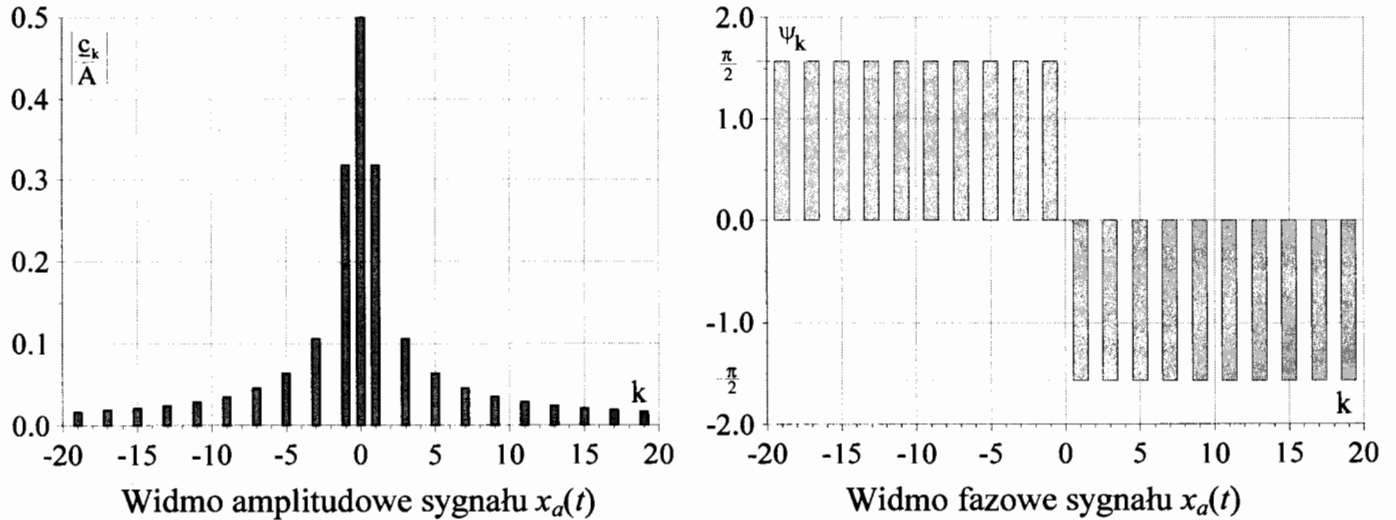
<sup>2)</sup> Por. (5)

Widmo amplitudowe i fazowe sygnału dla  $\beta = 0.5$  wyznaczamy wykorzystując (7), (8) i (13)

$$c_{2n-1} = \frac{1}{2}(a_{2n-1} - jb_{2n-1}) = -j \frac{A}{(2n-1)\pi} = \frac{A}{|2n-1|\pi} e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sgn}(2n-1)}, \quad c_0 = \frac{A}{2} \quad (58)$$

stąd

$$|c_{2n-1}| = \frac{A}{|2n-1|\pi}, \quad \phi_{2n-1} = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(2n-1) \quad (59)$$



rys.8

Na zakończenie przykładu wyznaczmy parametry charakteryzujące przebieg prostokątny.

- Wartość średnia:

$$X_{a_{sr}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_a(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A dt = \frac{A}{2} \quad (60)$$

- Wartość skuteczna:

$$X_{a_{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_a^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \frac{T_0}{2} A^2} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (61)$$

- Współczynnik szczytu :  $k_s = \sqrt{2} \approx 1.41$

- Współczynnik kształtu:  $k_k = \sqrt{2} \approx 1.41$

-Współczynnik zawartości harmoniczej  $2n-1$ :

$$h_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \quad (62)$$

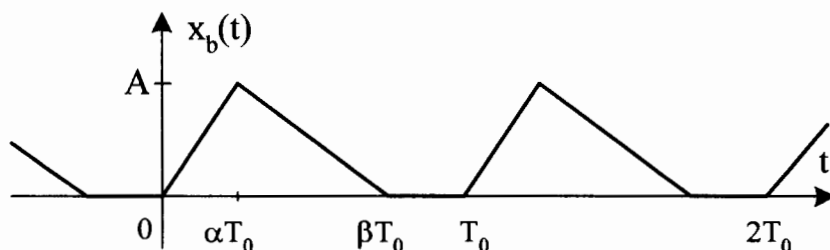
- Współczynnik zawartości harmoniczych<sup>1)</sup>:

$$h = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx 0.483 \quad (63)$$

<sup>1)</sup> Przy obliczaniu współczynnika zawartości harmoniczych można wykorzystać wzór Parsevala (43)

$$\sum_{k=2}^{\infty} X_{k_{sk}}^2 = X_{sk}^2 - X_{1_{sk}}^2 - X_0^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{X_{sk}^2 - X_0^2}{X_{1_{sk}}^2} - 1} \quad (64)$$

**Przykład 2. Sygnał trójkątny -  $x_b(t)$ .**



Współczynniki szeregu wykładniczego wyznaczmy na podstawie współczynników Fouriera drugiej pochodnej sygnału  $x_b(t)$ , wykorzystując zależności (27) i (31).

Ze względu na to, że różniczkowanie eliminuje składową zerową -  $c_0$ , obliczymy ją bezpośrednio z pierwotnego wzoru.

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{A}{2} \beta \quad (65)$$

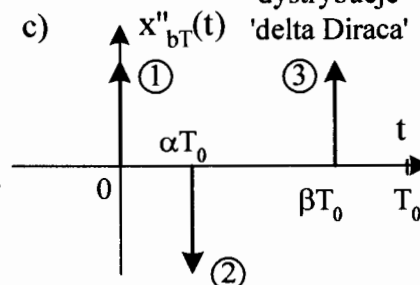
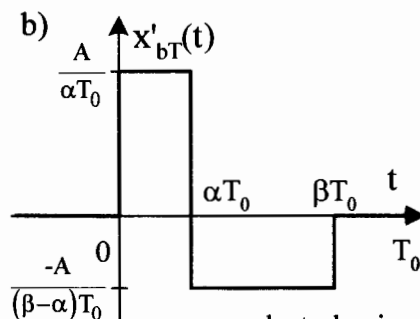
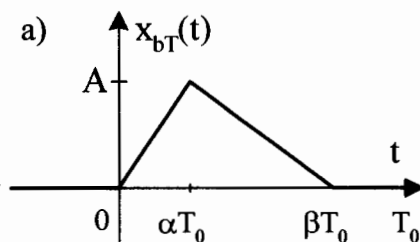
Po dwukrotnym - dystrybucyjnym zróżniczkowaniu sygnału  $x_b(t)$ , stwierdzamy, że jego druga pochodna zawiera wyłącznie składniki stanowiące impulsy 'delta Diraca', co znacznie upraszcza całkowanie.

Oznaczając przez  $x_{bT}(t)$  sygnał w przedziale  $(0, T_0)$ , można napisać

$$x''_{bT}(t) = \frac{A}{T_0} \left\{ \frac{1}{\alpha} \delta(t) - \frac{\beta}{(\beta-\alpha)\alpha} \delta(t - \alpha T_0) + \frac{1}{\beta-\alpha} \delta(t - \beta T_0) \right\} \quad (66)$$

Na podstawie zależności (27) wyznaczamy  $\underline{c}_k^{(2)}$  (współczynniki szeregu wykładniczego, drugiej pochodnej sygnału  $x_b(t)$ )

$$\begin{aligned} \underline{c}_k^{(2)} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x''_{bT}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{A}{T_0^2} \int_0^{T_0} \left\{ \frac{1}{\alpha} \delta(t) - \frac{\beta}{(\beta-\alpha)\alpha} \delta(t - \alpha T_0) + \frac{1}{\beta-\alpha} \delta(t - \beta T_0) \right\} e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (67)$$



rys.10

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\rightarrow \frac{A}{\alpha T_0} \delta(t) \\ \textcircled{2} &\rightarrow -\frac{A}{T_0} \frac{\beta}{(\beta-\alpha)\alpha} \delta(t - \alpha T_0) \\ \textcircled{3} &\rightarrow \frac{A}{(\beta-\alpha)T_0} \delta(t - \beta T_0) \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu własności filtracyjnej impulsu 'delta Diraca' otrzymujemy

$$\begin{aligned} \underline{c}_k^{(2)} &= \frac{A}{T_0^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{(\beta-\alpha)\alpha} e^{-jk\omega_0 \alpha T_0} + \frac{1}{\beta-\alpha} e^{-jk\omega_0 \beta T_0} \right\} = \\ &= \frac{A\omega_0^2}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{(\beta-\alpha)\alpha} e^{-j2k\pi\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha} e^{-j2k\pi\beta} \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

Współczynniki Fouriera sygnału  $x_b(t)$  wynoszą

$$\underline{c}_k = -\frac{1}{k^2 \omega_0^2} \underline{c}_k^{(2)} = -\frac{A}{4k^2 \pi^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{(\beta - \alpha)\alpha} \left[ \beta e^{-j2k\pi\alpha} - \alpha e^{-j2k\pi\beta} \right] \right\} \quad (69)$$

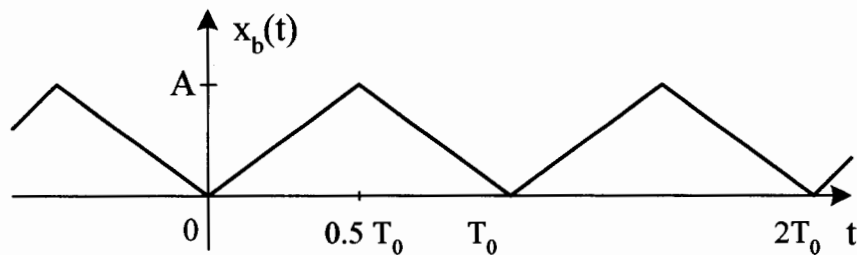
$$a_k = 2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_k\} = -\frac{A}{2k^2 \pi^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{(\beta - \alpha)\alpha} \left[ \beta \cos(2k\pi\alpha) - \alpha \cos(2k\pi\beta) \right] \right\} \quad (70)$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im}\{\underline{c}_k\} = \frac{A}{2k^2 \pi^2} \frac{1}{(\beta - \alpha)\alpha} \left[ \beta \sin(2k\pi\alpha) - \alpha \sin(2k\pi\beta) \right]$$

Szereg Fouriera ma więc postać następującą

$$x_b(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ -\left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta \cos(2k\pi\alpha) - \alpha \cos(2k\pi\beta)}{(\beta - \alpha)\alpha} \right] \cos(k\omega_0 t) + \frac{\beta \sin(2k\pi\alpha) - \alpha \sin(2k\pi\beta)}{(\beta - \alpha)\alpha} \sin(k\omega_0 t) \right\} \quad (71)$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 1$  otrzymujemy sygnał (rys.11) będący funkcją



rys.11

parzystą oraz (pomijając składową stałą) również antysymetryczną.

Uwzględniając wartości parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  otrzymujemy

$$c_0 = \frac{A}{2}, \quad \underline{c}_k = -\frac{A}{4k^2 \pi^2} \left\{ 2 - 4e^{-jk\pi} + 2e^{-j2k\pi} \right\} = -\frac{A}{k^2 \pi^2} \left[ 1 - (-1)^k \right] \quad (72)$$

stąd

$$b_k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \frac{a_0}{2} = \frac{A}{2} \quad (73)$$

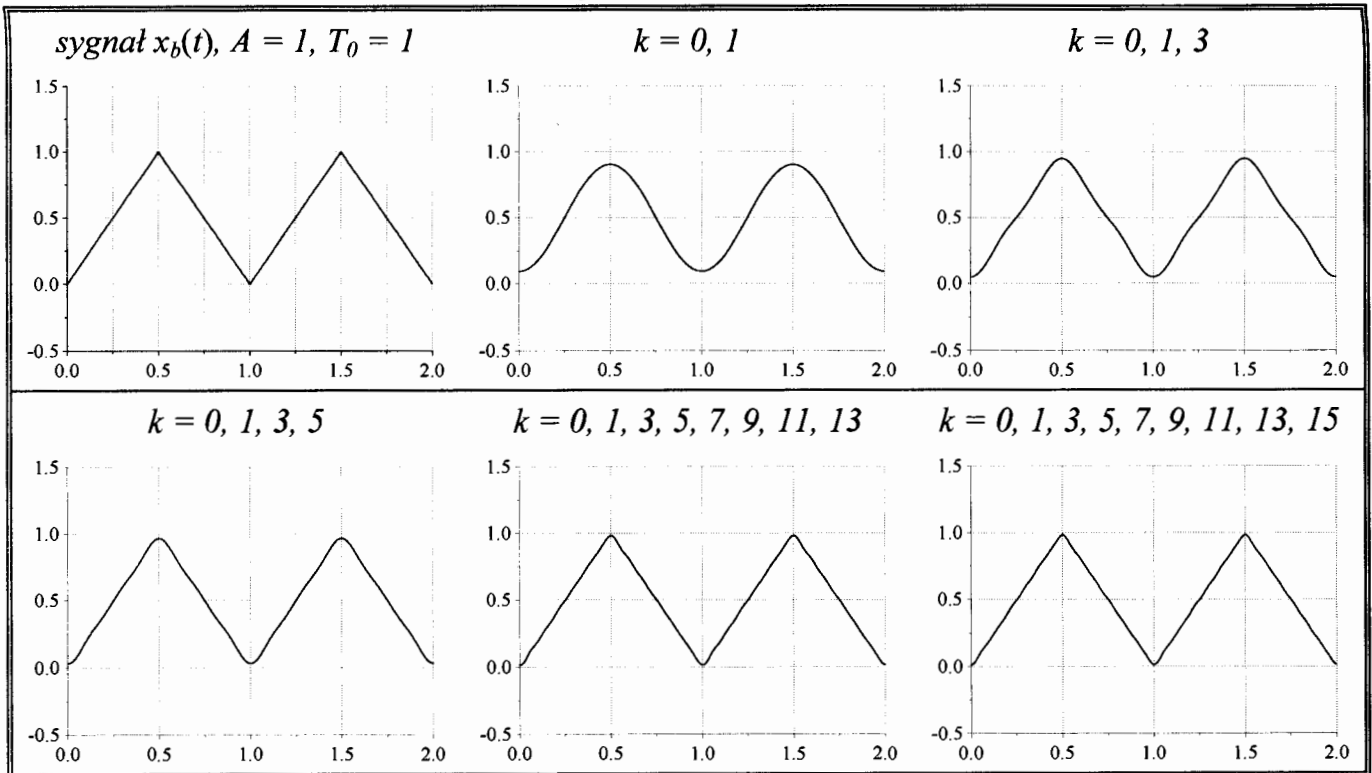
$$a_k = -\frac{2A}{k^2 \pi^2} \left[ 1 - (-1)^k \right] \quad \text{tzn. } a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = -\frac{4A}{(2n-1)^2 \pi^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

Czyli

$$x_b(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)\omega_0 t] = \quad (74)$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

Poniżej przedstawiono aproksymację sygnału trójkątnego wielomianem trygonometrycznym dla  $k \in (0, 15)$ . Błąd aproksymacji wynosi  $\|\varepsilon\|_{15}^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-5}$ , natomiast błąd względny  $\delta_{15} \approx 0.001$ .



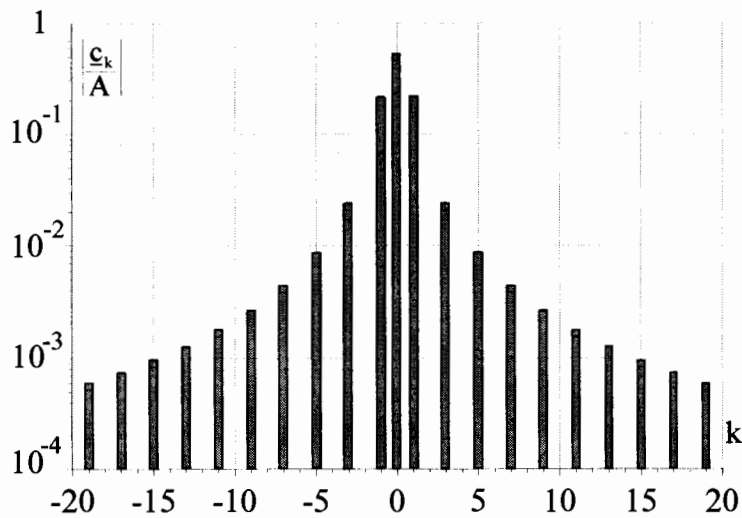
rys.12

Widmo amplitudowo-fazowe sygnału  $x_b(t)$  możemy przedstawić w postaci następującej:

$$c_{2n-1} = -\frac{2A}{(2n-1)^2 \pi^2} = \frac{2A}{(2n-1)^2 \pi^2} e^{j\pi \operatorname{sgn}(2n-1)}, \quad c_0 = \frac{A}{2} \quad (75)$$

stąd

$$|c_{2n-1}| = \frac{2A}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad \phi_{2n-1} = \pi \operatorname{sgn}(2n-1) \quad (76)$$



rys.13 Widmo amplitudowe sygnału  $x_b(t)$



**Parametry charakteryzujące przebieg trójkątny.**

- Wartość średnia:

$$X_{b\ sr} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_b(t) dt = \frac{A}{2} \quad (77)$$

- Wartość skuteczna:

$$X_{b\ sk} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_b^2(t) dt} = \sqrt{\frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0}t\right)^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{3}} \cong 0.577 \cdot A \quad (78)$$

- Współczynnik szczytu:  $k_s = \sqrt{3} \approx 1.73$

- Współczynnik kształtu:  $k_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$

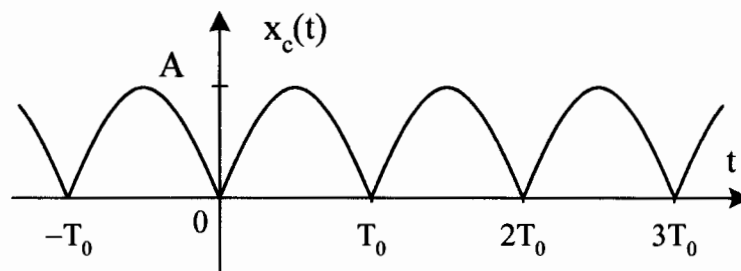
- Współczynnik zawartości harmoniczej  $2n-1$ :

$$h_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)^2} \quad (79)$$

- Współczynnik zawartości harmoniczych:

$$h = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}} = \sqrt{\frac{\pi^4}{96} - 1} \approx 0.121 \quad (80)$$

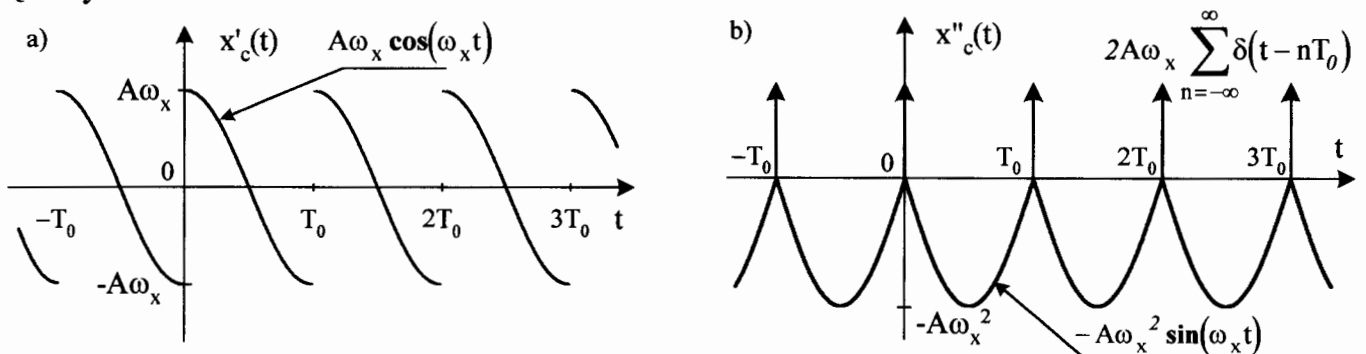
**Przykład 3. Sygnał  $x_c(t) = A |\sin(\omega_x t)|$  - "sinusoida wyprostowana dwupołówkowo".**



rys.14

Przedstawiony powyżej sygnał można otrzymać zasilając napięciem sinusoidalnym prostownik dwupołówkowy pracujący w tzw. układzie Gretza lub przy wykorzystaniu transformatora z dzielonym uzwojeniem wtórnym. Obciążenie w obu przypadkach powinno być rezystancyjne.

Współczynniki szeregu wykładniczego wyznaczmy wykorzystując związek między sygnałem  $x_c(t)$  i jego drugą pochodną dystrybucyjną. Przebiegi pierwszej i drugiej pochodnej przedstawione są na rys 15.



rys.15

Na podstawie rysunku 15b

$$x_c''(t) + \omega_x^2 x_c(t) = 2A\omega_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad (81)$$

Występujące w powyższym równaniu wyrażenie złożone z dystrybucji 'delta Diraca' można przedstawić w postaci szeregu Fouriera (por. (35))

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} = \frac{\omega_x}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2k\omega_x t}; \quad \left( \frac{1}{T_0} \int_{0-}^{T_0-} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \right) \quad (82),(83)$$

gdzie:  $\omega_0 = 2\omega_x$ ,  $T_0 = \frac{T_x}{2}$

Uwzględniając szereg sygnału  $x_c(t)$  i jego drugiej pochodnej oraz związek (81) otrzymujemy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -(2k\omega_x)^2 c_k e^{j2k\omega_x t} + \omega_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2k\omega_x t} = \frac{2A\omega_x^2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2k\omega_x t} \quad (84)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ (1 - 4k^2) c_k - \frac{2A}{\pi} \right] e^{j2k\omega_x t} = 0 \quad (85)$$

Powyzsza równość musi być spełniona dla dowolnego czasu 't'. Możliwe jest to tylko wtedy, gdy współczynniki przy wykładniczych są równe zero. Wynika stąd, że

$$c_k = \frac{2A}{\pi(1 - 4k^2)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (86)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2A}{\pi}, \quad a_k = -\frac{4A}{\pi(4k^2 - 1)}, \quad b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Czyli

$$x_c(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos[2k\omega_x t] = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cos[2k\omega_x t] = \quad (87)$$

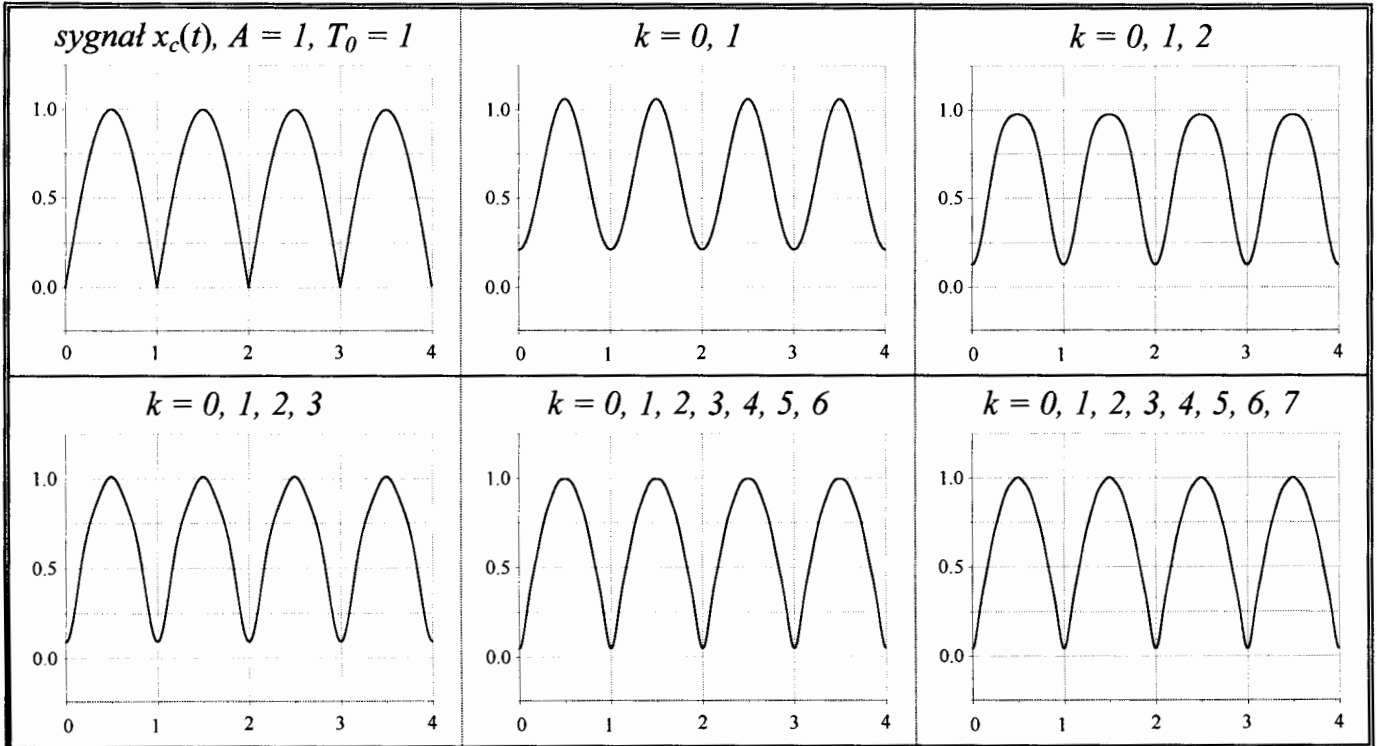
$$= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2\omega_x t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4\omega_x t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6\omega_x t) + \dots \right)$$

Widmo amplitudowo-fazowe sygnału  $x_c(t)$  jest następujące:

$$c_0 = \frac{2A}{\pi}; \quad (88)$$

$$|c_k| = \frac{2A}{(4k^2 - 1)\pi}, \quad \phi_k = \pi \operatorname{sgn}(k) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Aproksymacja sygnału  $x_c(t)$  wielomianem trygonometrycznym -  $k = 0 - 7$ .



rys.16

Parametry sygnału  $x_c(t)$ .

- Wartość średnia:

$$X_{c_{sr}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \sin(\omega_x t) dt = \frac{2}{T_x} \int_0^{\frac{T_x}{2}} A \sin(\omega_x t) dt = -\frac{2A}{T_x \omega_x} \cos(\omega_x t) \Big|_0^{\frac{T_x}{2}} = \frac{2A}{\pi} \quad (89)$$

- Wartość skuteczna:

$$X_{c_{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [A \sin(\omega_x t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T_x} \int_0^{\frac{T_x}{2}} [A \sin(\omega_x t)]^2 dt} = A \sqrt{\frac{2}{T_x} \cdot \frac{T_x}{4}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (90)$$

Współczynnik szczytu:  $k_s = \sqrt{2} \approx 1.41$       - Współczynnik kształtu:  $k_k = \frac{\frac{A}{\sqrt{2}}}{\frac{2A}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$

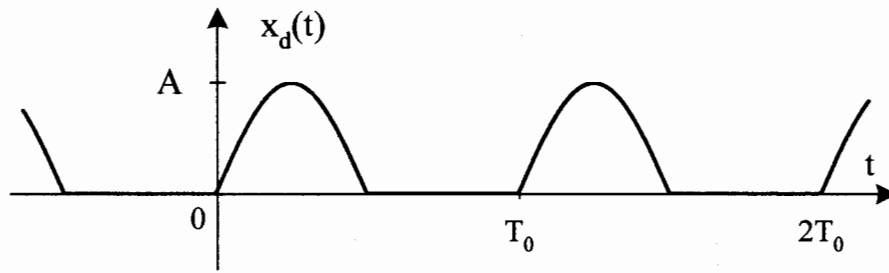
- Współczynnik zawartości  $k$ -tej harmonicznej:  $h_k = \frac{3}{4k^2 - 1} \quad (91)$

- Współczynnik zawartości harmonicznych:<sup>1)</sup>

$$h = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4k^2 - 1}\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{4A}{3\pi\sqrt{2}}\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}{\frac{16}{18\pi^2}} - 1} = \frac{\sqrt{9\pi^2 - 88}}{4} \approx 0.227 \quad (92)$$

<sup>1)</sup> Sygnał nie posiada harmonicznej o częstotliwości sinusoidy.

**Przykład 4. Sygnał  $x_d(t)$  - "sinusoida wyprostowana jednopółkowo".**



rys.17

Sygnał  $x_d(t)$  można zapisać wykorzystując analizowany poprzednio przebieg  $x_c(t)$ . Nietrudno jest zauważyć, że

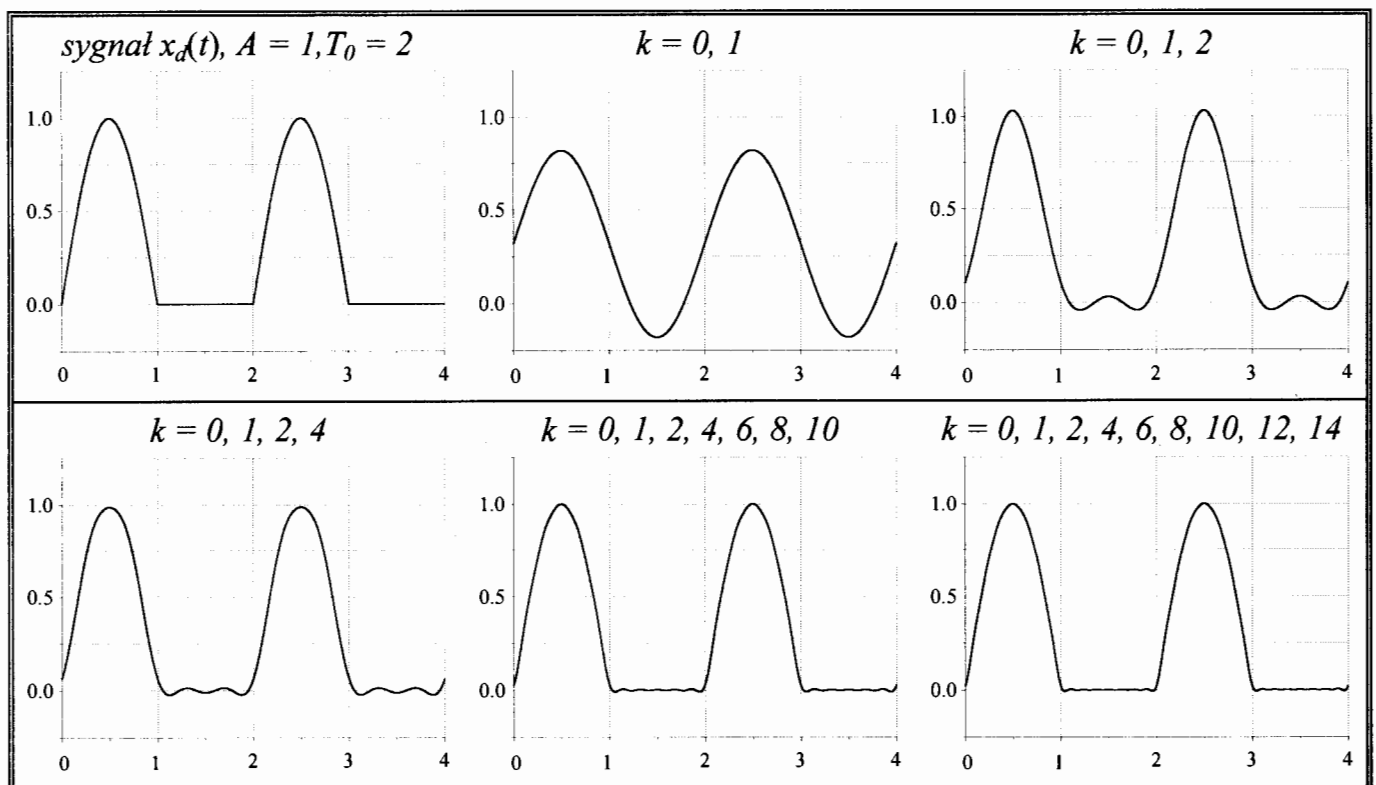
$$x_d(t) = \frac{A}{2} [\sin(\omega_x t) + |\sin(\omega_x t)|] = \frac{1}{2} [A \sin(\omega_x t) + x_c(t)] \quad (93)$$

Na tej podstawie możemy napisać wzór na szereg Fouriera

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin(\omega_x t) - \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cos[2k\omega_x t] = \\ &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin(\omega_x t) - \frac{2A}{\pi} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} \cos(2\omega_x t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos(4\omega_x t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos(6\omega_x t) + \dots \right) \end{aligned} \quad (94)$$

W tym przypadku, okres sygnału  $x_d(t)$  równy jest okresowi sinusoidy

$$T_0 = T_x, \quad \omega_0 = \omega_x$$



rys.18

**Parametry sygnału  $x_d(t)$**

- Wartość średnia:

$$X_{d_{sr}} = \frac{1}{T_x} \int_0^{\frac{T_x}{2}} A \sin(\omega_x t) dt = -\frac{A}{T_x \omega_x} \cos(\omega_x t) \Big|_0^{\frac{T_x}{2}} = \frac{A}{\pi} \quad (95)$$

- Wartość skuteczna:

$$X_{d_{sk}} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} [A \sin(\omega_x t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T_x} \int_0^{\frac{T_x}{2}} [A \sin(\omega_x t)]^2 dt} = A \sqrt{\frac{1}{T_x} \cdot \frac{T_x}{4}} = \frac{A}{2} \quad (96)$$

- Współczynnik szczytu:  $k_s = 2$

- Współczynnik kształtu:  $k_k = \frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{\pi}} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571$

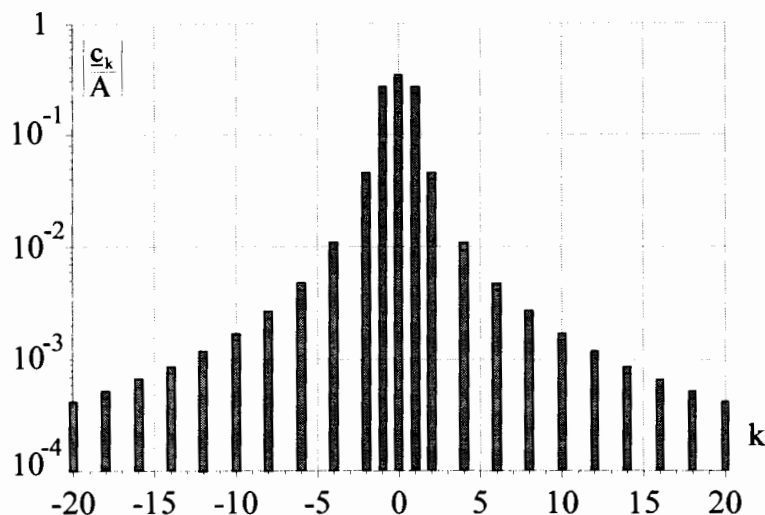
- Współczynnik zawartości  $k$ -tej harmonicznej:

$$h_k = \frac{4}{(4k^2 - 1)\pi} \quad (97)$$

- Współczynnik zawartości harmonicznych:

$$h = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{(4k^2 - 1)\pi} \right]^2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{A}{2\sqrt{2}}\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}}{\frac{1}{8}} - 1} = \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} \approx 0.435 \quad (98)$$

- Widmo amplitudowe:



rys.19 Widmo amplitudowe sygnału  $x_d(t)$

**15. Prądy i napięcia w obwodach elektrycznych przy wymuszeniach okresowych.**

Niech będzie dany liniowy, stabilny obwód elektryczny, zawierający skończoną liczbę autonomicznych źródeł prądu i napięcia o przebiegach okresowych. Jeżeli dla każdej pary wymuszeń stosunek ich okresów (częstotliwości) jest liczbą wymierną to przebiegi prądów i napięć w stanie ustalonym będą funkcjami okresowymi<sup>1)</sup>. Stan ustalony w takim obwodzie może być wyznaczany przy wykorzystaniu metody superpozycji względem harmonicznym wymuszeń.

Po rozwinięciu przebiegów napięć i prądów źródłowych (tzn. wymuszeń) w szereg Fouriera (wykładniczy lub trygonometryczny) rozwiązujemy obwód niezależnie dla każdej harmonicznej. Następnie przedstawiamy przebiegi w postaci sumy rozwiązań dla każdej harmonicznej.

Jeżeli wymuszenia zapisane są za pomocą szeregu wykładniczego wówczas prądy i napięcia w obwodzie przedstawiamy również w tej postaci

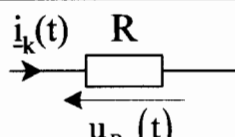
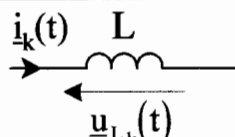
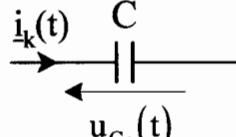
$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{i}_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{i}_k e^{jk\omega_0 t} \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (99)$$

gdzie:

$$\underline{i}_k = i_k e^{j\phi_{i_k}}, \quad \underline{u}_k = u_k e^{j\phi_{u_k}} \quad (100)$$

Związek między współczynnikami  $\underline{u}_k$  i  $\underline{i}_k$  dla danej gałęzi, wynika z operacji jakim podlegają, posiadające postać wykładniczą, harmoniczne  $\underline{u}_k(t)$  i  $\underline{i}_k(t)$ .

W poniższej tabeli zestawiono związki dla elementów RLC.

<div style="text-align: center;">  </div> $\underline{u}_{R_k}(t) = R \underline{i}_k(t)$ $\underline{u}_{R_k} e^{jk\omega_0 t} = R \underline{i}_k e^{jk\omega_0 t}$ $\underline{u}_{R_k} = R \underline{i}_k \quad (101)$	<div style="text-align: center;">  </div> $\underline{u}_{L_k}(t) = L \frac{d}{dt} \{ \underline{i}_k(t) \}$ $\underline{u}_{L_k} e^{jk\omega_0 t} = L \frac{d}{dt} \{ \underline{i}_k e^{jk\omega_0 t} \}$ $\underline{u}_{L_k} = jk\omega_0 L \underline{i}_k \quad (102)$	<div style="text-align: center;">  </div> $\underline{i}_k(t) = C \frac{d}{dt} \{ \underline{u}_{C_k}(t) \}$ $\underline{i}_k e^{jk\omega_0 t} = C \frac{d}{dt} \{ \underline{u}_{C_k} e^{jk\omega_0 t} \}$ $\underline{i}_k = jk\omega_0 C \underline{u}_{C_k} \quad (103)$
--	---	---

Dla gałęzi złożonej z kilku elementów RLC wprowadzamy pojęcie impedancji zespolonej  $\underline{Z}_k$ .

$$\underline{Z}_k = \frac{\underline{u}_k}{\underline{i}_k}; \quad \left( \text{jeżeli } u(t) \text{ i } i(t) \text{ są funkcjami rzeczywistymi to } \underline{Z}_{-k} = \underline{Z}_k^* \right) \quad (104)$$

$$\underline{u}_k = \underline{Z}_k \underline{i}_k = Z_k e^{j\varphi_k} \cdot i_k e^{j\phi_{i_k}} = Z_k i_k e^{j(\phi_{i_k} + \varphi_k)} = u_k e^{j\phi_{u_k}} \quad (105)$$

gdzie:  $\varphi_k = \arg \underline{Z}_k$

<sup>1)</sup> Np. sygnał w postaci  $x(t) = \sin\left(\frac{1}{3}t\right) + \sin\left(\frac{4}{7}t\right)$  posiada przebieg okresowy a jego okres możemy wyznaczyć jako najmniejszą wspólną wielokrotność okresów sygnałów składowych. W tym przypadku  $T_0 = 42\pi$ . Pierwszy składnik stanowi 7-mą a drugi 12- tą harmoniczną tzn.  $x(t) = \sin\left(7 \cdot \frac{1}{21}t\right) + \sin\left(12 \cdot \frac{1}{21}t\right)$ . Przykładem przebiegu nieokresowego może być sygnał  $x(t) = \sin(t) + \sin(t\sqrt{2})$ . Stosunek częstotliwości składników wynosi  $\sqrt{2}$  (tzn. jest liczbą niewymierną).

Jeżeli przebiegi prądów i napięć przedstawione są za pomocą szeregów trygonometrycznych (15)

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_{k_{sk}} \sin(k\omega_0 t + \Psi_{i_k}), \quad u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_{k_{sk}} \sin(k\omega_0 t + \Psi_{u_k}) \quad (106)$$

$$\text{gdzie: } I_{k_{sk}} = \sqrt{2} |i_k|, \quad U_{k_{sk}} = \sqrt{2} |u_k|, \quad \Psi_{u_k} = \Psi_{i_k} + \varphi_k \quad (107)$$

to do wyznaczenia rozwiązania możemy stosować metodę symboliczną, wprowadzając odpowiednie wartości zespolone prądów i napięć, dla harmonicznnych wg oznaczeń (106) i (107)

$$\underline{U}_k = U_{k_{sk}} e^{j\Psi_{u_k}}, \quad \underline{I}_k = I_{k_{sk}} e^{j\Psi_{i_k}} \quad (108)$$

**Uwaga:** Należy zwrócić uwagę na różnicę między współczynnikami wykładniczego szeregu Fouriera  $\underline{u}_k$  ( $\underline{i}_k$ ) (pisanymi małymi literami z podkreśleniem) a tzw. wartościami zespolonymi  $\underline{U}_k$  ( $\underline{I}_k$ ) (duże litery z podkreśleniem). Związek między tymi wielkościami jest następujący

$$\underline{U}_k = \sqrt{2} \underline{u}_k e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad \underline{I}_k = \sqrt{2} \underline{i}_k e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (109)$$

### 16. Moc w obwodach elektrycznych przy wymuszeniu okresowym - w stanie ustalonym.

Moc czynną dostarczaną do gałęzi obwodu (przy przeciwnym zastrzałkowaniu prądu i napięcia) można określić jako wartość średnią okresowej mocy chwilowej

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) i(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{j(\phi_{i_k} + \varphi_k)} i_k e^{-j\phi_{i_k}} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k i_k e^{j\varphi_k} = u_0 i_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k i_k e^{j\varphi_k} + u_{-k} i_{-k} e^{j\varphi_{-k}}) = \\ &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k i_k (e^{j\varphi_k} + e^{-j\varphi_k}) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2u_k i_k \cos \varphi_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k_{sk}} I_{k_{sk}} \cos \varphi_k \end{aligned}$$

$$\text{gdzie: } U_{k_{sk}} = \frac{U_{k_{max}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} u_k \quad \text{oraz} \quad I_{k_{sk}} = \frac{I_{k_{max}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} i_k \quad \text{dla } k > 0$$

Ostatecznie

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} U_{k_{sk}} I_{k_{sk}} \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \quad (110)$$

Analogicznie można określić moc bierną jako sumę mocy biernych od poszczególnych harmonicznnych, natomiast moc pozorną w postaci iloczynu wartości skutecznych napięcia i prądu

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_{k_{sk}} I_{k_{sk}} \sin \varphi_k, \quad S = U_{sk} I_{sk} \quad (111)$$

W przypadku przebiegów odkształconych (nieszinusoidalnych) spełniona jest nierówność

$$S^2 \geq P^2 + Q^2 \quad (112)$$

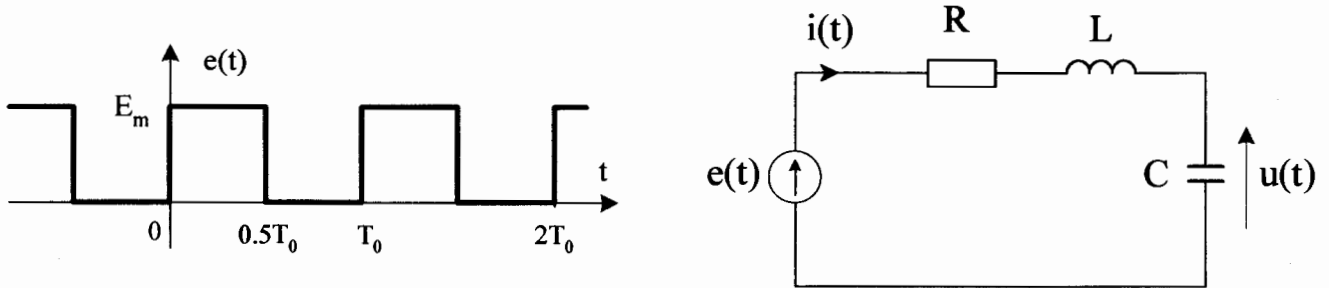
Tzw. moc odkształcenia  $T$

$$T^2 = S^2 - (P^2 + Q^2) \quad (113)$$

może (w obwodach z elementami biernymi) określać odkształcenie sygnałów od sinusoidy.

17. Przykład analizy widmowej obwodu elektrycznego z wymuszeniem okresowym<sup>1)</sup>.

Przedstawiony na rysunku 20 obwód zasilany jest ze źródła napięcia o przebiegu okresowym  $e(t)$ . Wyznaczone zostaną widma amplitudowo-fazowe przebiegów  $i(t)$ ,  $u(t)$  ( w stanie ustalonym ).



rys.20

Na podstawie przykładu 1, uwzględniając  $\beta = 0.5$  możemy sygnał  $e(t)$  zapisać za pomocą następującego szeregu

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{e}_k e^{jk\omega_0 t} = e_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{e}_{2n-1} e^{j(2n-1)\omega_0 t} \quad (114)$$

gdzie:

$$e_0 = \frac{E_m}{2}, \quad \underline{e}_k = -j \frac{E_m}{k\pi}, \quad k = 2n-1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (115)$$

Przebiegi  $i(t)$  i  $u(t)$  poszukujemy również w postaci szeregów wykładniczych,

$$i(t) = i_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{i}_{2n-1} e^{j(2n-1)\omega_0 t}, \quad u(t) = u_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{u}_{2n-1} e^{j(2n-1)\omega_0 t} \quad (116)$$

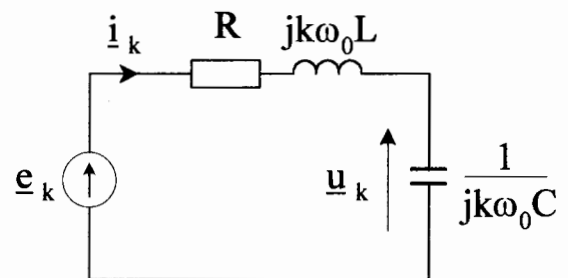
których składowe zerowe wynoszą:

$$i_0 = 0, \quad u_0 = e_0 = \frac{E_m}{2} \quad (117)$$

Pozostałe harmoniczne ( $k=2n-1$ ) wyznaczone zostaną na podstawie schematu przedstawionego na rys.21.

$$\underline{i}_k = \frac{\underline{e}_k}{\underline{Z}_k}, \quad \underline{u}_k = \underline{i}_k \frac{1}{jk\omega_0 C} \quad (105)$$

$$\underline{Z}_k = R + jk\omega_0 L + \frac{1}{jk\omega_0 C} \quad (106)$$



rys.21

<sup>1)</sup> Celem analizy widmowej jest określenie struktury widmowej sygnałów oraz badanie wpływu parametrów układu na kształt ich charakterystyk widmowych. Możliwe jest także wyznaczanie czasowych przebiegów badanych sygnałów. Jednakże, w przypadku nieograniczonego widma wymuszenia, otrzymane tą drogą przebiegi mogą być najczęściej przedstawione jedynie w postaci przybliżonej.



Współczynniki zespolone  $\underline{i}_k$  i  $\underline{u}_k$  określone są zależnościami:

$$\underline{i}_k = \frac{-j \frac{E_m}{k\pi}}{R + jk\omega_0 L + \frac{1}{jk\omega_0 C}} = \frac{E_m}{\pi} \cdot \frac{\omega_0 C}{1 - k^2 \omega_0^2 LC + jk\omega_0 RC}$$

$$\underline{u}_k = \frac{-j \frac{E_m}{k\pi}}{R + jk\omega_0 L + \frac{1}{jk\omega_0 C}} \cdot \frac{1}{jk\omega_0 C} = \frac{E_m}{j\pi k} \cdot \frac{1}{1 - k^2 \omega_0^2 LC + jk\omega_0 RC}$$

(118)

$$k = 2n - 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Widmo amplitudowe i fazowe badanych sygnałów wynoszą:

$$|\underline{i}_k| = \frac{E_m}{\pi} \cdot \frac{\omega_0 C}{\sqrt{(1 - k^2 \omega_0^2 LC)^2 + (k\omega_0 RC)^2}}$$

$$\phi_{i_k} = \begin{cases} -\arctg\left(\frac{k\omega_0 RC}{1 - k^2 \omega_0^2 LC}\right) & \text{dla } k^2 < \omega_0^2 LC \\ -\arctg\left(\frac{k\omega_0 RC}{1 - k^2 \omega_0^2 LC}\right) + \pi & \text{dla } k < -\omega_0 \sqrt{LC} \\ -\arctg\left(\frac{k\omega_0 RC}{1 - k^2 \omega_0^2 LC}\right) - \pi & \text{dla } k > \omega_0 \sqrt{LC} \end{cases}$$

(119)

$$|\underline{u}_k| = \frac{E_m}{\pi |k|} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 \omega_0^2 LC)^2 + (k\omega_0 RC)^2}}$$

(120)

$$\phi_{u_k} = \phi_{i_k} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(k),$$

Powyższe rozwiązania zilustrowane zostaną przykładem z danymi liczbowymi.

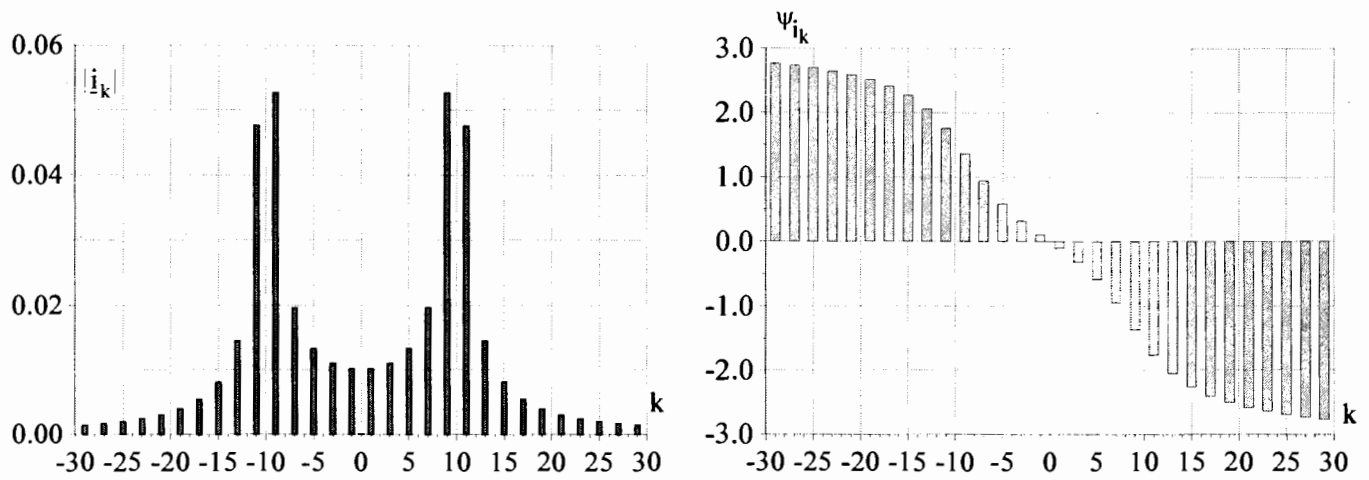
Przyjmujemy :  $E_m = \pi, L = 1, R = 10^{-1}, C = 10^{-2}, \omega_0 = 1$

Podstawiając dane do przedstawionych zależności otrzymujemy odpowiednio

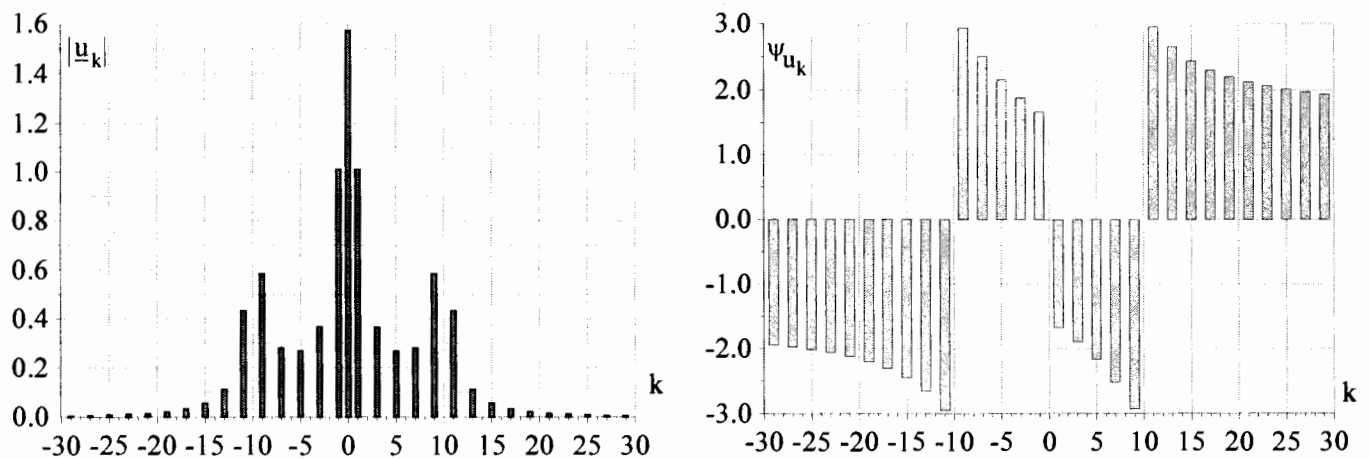
$$\underline{Z}_k = 10^{-1} + j\left(k - \frac{10^2}{k}\right)$$

$$\underline{i}_k = \frac{10^{-2}}{1 - 10^{-2} k^2 + j10^{-3} k} = \frac{10}{10^3 - 10k^2 + jk}$$

$$\underline{u}_k = \frac{1}{jk} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2} k^2 + j10^{-3} k} = \frac{1}{jk} \cdot \frac{10^3}{10^3 - 10k^2 + jk}$$



rys.22 Widmo amplitudowe i fazowe prądu  $i(t)$



rys.23 Widmo amplitudowe i fazowe napięcia  $u(t)$

Warto zwrócić uwagę na wzmocnienie amplitud harmonicznych w pobliżu  $k = \pm 10$ . Pulsacje odpowiadające tym składowym stanowią pulsacje rezonansowe rozważanego obwodu.

$$\omega_{rez} = \pm \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm 10$$