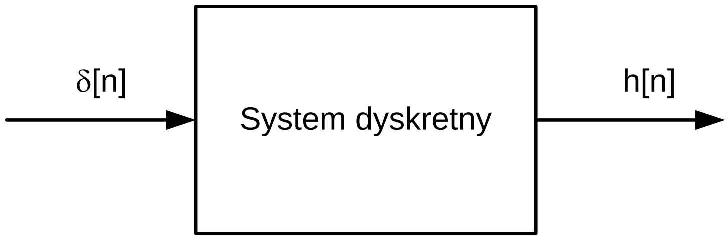
SYSTEMY DYSKRETNE LTI

Odpowiedź impulsowa

Odpowiedź impulsowa $h[n]$ systemu jest to sygnał na wyjściu systemu, gdy na jego wejściu wymuszono w chwili *n=0* impuls jednostkowy $\delta[n]$.



Odpowiedź impulsowa $h[n]$ jest kompletną charakterystyką sytemu LTI, pozwalającą określić odpowiedź systemu na dowolne inne wymuszenie.

Iloczyn sygnału $x[n]$ oraz impulsu $\delta[n]$ możemy zapisać jako:

$$x[n]\cdot\delta[n]=x[0]\cdot\delta[n]$$

Ogólnie zależność ta dla impulsu przesuniętego w czasie jest następująca:

$$x[n]\cdot\delta[n-k]=x[k]\cdot\delta[n-k]$$

gdzie n reprezentuje indeks czasu, $x[n]$ opisuje sygnał.

Można zauważyć, że mnożenie sygnału i impulsu przesuniętego daje w wyniku impuls przesunięty o polu równym wartości funkcji w miejscu przesunięcia impulsu.

Ta właściwość pozwala zapisać wymuszenie $x[n]$ jako:

$$x[n]=\ldots+x[-2]\cdot\delta[n+2]+x[-1]\cdot\delta[n+1]+x[0]\cdot\delta[n]+x[1]\cdot\delta[n-1]+x[2]\cdot\delta[n-2]+\ldots$$

lub w skróconej formie :

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot\delta[n-k]$$

Wykorzystując liniowość i stacjonarność systemu odpowiedź wynosi:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h[n-k]$$

Tzn. jeżeli wymuszeniem systemu LTI *x[n]* jest superpozycja „ważonych" impulsów przesuniętych w czasie to jego odpowiedzią będzie superpozycja identycznie „ważonych" odpowiedzi *h[n]* impulsowych identycznie przesuniętych w czasie.

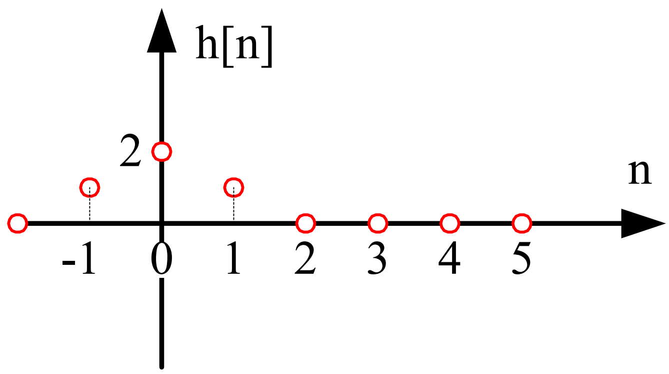
Operację pozwalającą wyznaczyć odpowiedź systemu na dowolne wymuszenie nazywa się splotem i oznacza gwiazdką * jak w wyrażeniu:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot h[n-k]$$

Przykład:

Odpowiedź impulsowa systemu LTI wynosi:

$$h[n]=\begin{cases}1, & n=\pm 1\\ 2, & n=0\\ 0, & inne\end{cases}$$



Należy wyznaczyć odpowiedź systemu na wymuszenie:

$$x[n]=\begin{cases}2, & n=0\\ 3, & n=1\\ -2, & n=2\\ 0, & inne\end{cases}$$

Rozwiązanie:

Wymuszenie wynosi:

$$x[n]=2\cdot\delta[n]+3\cdot\delta[n-1]-2\cdot\delta[n-2]$$

Odpowiedź będzie superpozycją odpowiedzi impulsowych:

$$y[n]=2\cdot h[n]+3\cdot h[n-1]-2\cdot h[n-2]$$

Ponieważ odpowiedź impulsowa wynosi:

$$h[n]=\delta[n+1]+2\cdot\delta[n]+\delta[n-1]$$

Zatem odpowiedź systemu

$$\begin{aligned}y[n]&=2\cdot\left(\delta[n+1]+2\cdot\delta[n]+\delta[n-1]\right)\\&+3\cdot\left(\delta[n]+2\cdot\delta[n-1]+\delta[n-2]\right)\\&-2\cdot\left(\delta[n-1]+2\cdot\delta[n-2]+\delta[n-3]\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y[n]&=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]\\&+3\delta[n]+6\delta[n-1]+3\delta[n-2]\\&-2\delta[n-1]-4\delta[n-2]-2\delta[n-3]\end{aligned}$$

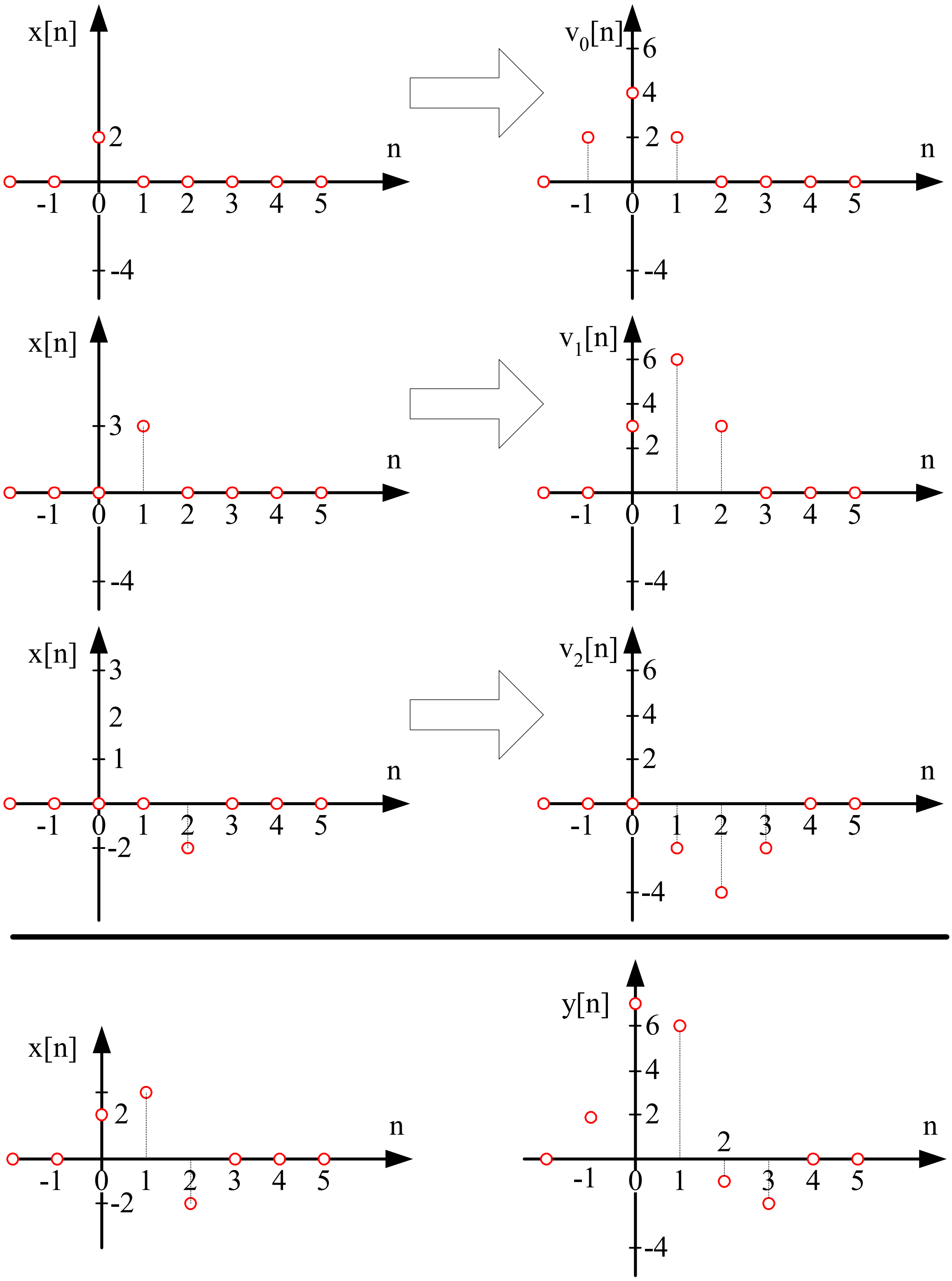
Stąd ostatecznie odpowiedź wynosi:

$$\boxed{y[n]=2\delta[n+1]+7\delta[n]+6\delta[n-1]-\delta[n-2]-2\delta[n-3]}$$

Matlab (splot dwóch sygnałów)

```
h=[1 2 1];
x=[2 3 -2];
y=conv(h,x))
```

Rozwiązanie graficznie:



Własności splotu:

Przemienność

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

Łączność

$$\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]=x[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)$$

Rozdzielność

$$x[n]*\left\{h_1[n]+h_2[n]\right\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

Korzystając z przemienności splotu można odpowiedź systemu obliczać jako:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\cdot x[n-k]$$

Odpowiedź jednostkowa.

Odpowiedź jednostkowa systemu dyskretnego, jest do odpowiedź *k[n]* na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego *1[n],* może być wyznaczona ze splotu:

$$k[n]=h[n]*1[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\cdot 1[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

Zależność między odpowiedzią impulsową i jednostkową:

$$h[n]=k[n]-k[n-1]$$

Własności systemu dyskretnego LTI:

Pamięć systemów

W systemach bez pamięci odpowiedź systemu *y[n]* zależy tylko od teraźniejszych wartości wymuszenia *x[n]*.

Ponieważ w systemach LTI zależność między odpowiedzią i wymuszeniem opisuje równanie:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\cdot x[n-k]$$

zatem musi być spełniony warunek dla odpowiedzi impulsowej:

$$h[k]=0 \ \ dla \ \ k \neq 0$$

Przyczynowość systemów:

Odpowiedź układu przyczynowego zależy tylko od przeszłych i teraźniejszych wartości sygnału wejściowego.

Przeszłe i teraźniejsze wartości wymuszenia $x[n], x[n-1], x[n-2], \ldots$ są związane z indeksem $k \geq 0$ splotu

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$

natomiast przyszłe wartości wymuszenia są związane z $k<0$.

Zatem dla systemów przyczynowych musi być spełniony warunek dla odpowiedzi impulsowej:

$$h[k]=0 \ \ dla \ \ k<0$$

Wtedy splot na następującą postać:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \quad \text{lub alternatywnie} \quad y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \cdot h[n-k]$$

Stabilność systemów:

Układ jest stabilny (w sensie BIBO), jeżeli przy ograniczonym sygnale wejściowym sygnał wyjściowy jest także ograniczony:

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \Rightarrow |y[n]| \leq M_y < \infty$$

Możemy wyznaczyć warunki jakie musi spełniać odpowiedź impulsowa, aby gwarantowała stabilność systemu.

$$|y[n]|=|h[n] * x[n]|$$

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]\right|$$

Ponieważ $|a+b| \le |a| + |b|$

$$\left|y[n]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]x[n-k]\right|$$

oraz $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left|y[n]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right|\left|x[n-k]\right|$$

Jeżeli wymuszenie jest ograniczone

$$\left|x[n]\right| \le M_x < \infty, \ oraz \ \left|x[n-k]\right| \le M_x < \infty$$

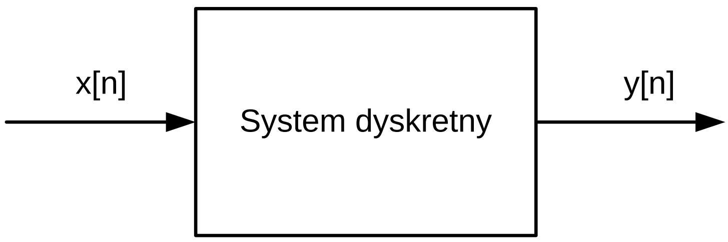
to odpowiedź

$$\left|y[n]\right| \le M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right|$$

Zatem aby odpowiedź była ograniczona musi być spełniony warunek ograniczonej absolutnej sumy odpowiedzi impulsowej:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h[k]\right| < \infty$$

Równania różnicowe



Rolę równań różniczkowych opisujących systemy analogowe w systemach dyskretnych pełnią równania różnicowe.

Zależności między wymuszeniem $x[n]$ i odpowiedzią $y[n]$ w systemach liniowych-stacjonarnych (LTI) opisują równania różnicowe ogólnie N-tego rzędu, liniowe w postaci:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

gdzie współczynniki a_k, b_l są rzeczywiste i stałe, a N określający rząd równania, jest największym opóźnieniem odpowiedzi $y[n]$.

Równania, różnicowe można rozwiązywać metodą klasyczną wykorzystując analogie do metod rozwiązujących równania różniczkowe.

Przykład:

Należy obliczyć odpowiedź dwóch różnych systemów (dyskretnego i ciągłego) metodą klasyczną przy zadanych równaniach opisujących systemy, warunkach początkowych, i wymuszeniach (analogie w metodzie klasycznej).

System dyskretny	**System ciągły**
Równanie różnicowe: $y[n+1]+\alpha\cdot y[n]=1+\beta^{-n},\quad y[0]=\gamma$	Równanie różniczkowe $\frac{d}{dt}y(t)+\alpha\cdot y(t)=1+e^{\beta t},\quad y(0)=\gamma$
Rozwiązanie w postaci 2 składowych: $y[n]=y_w[n]+y_s[n]$	$y(t)=y_w(t)+y_s(t)$
Składowa swobodna spełnia równanie jednorodne: $y_s[n+1]+\alpha\cdot y_s[n]=0$	$\frac{d}{dt}y_s(t)+\alpha\cdot y_s(t)=0$
Równanie charakterystyczne: $s+\alpha=0$	$s+\alpha=0$
Pierwiastek równania charakterystycznego $s=-\alpha$	$s=-\alpha$
Składowa swobodna $y_s[n]=A_1(-\alpha)^n$	$y_s(t)=A_1e^{-\alpha t}$

Składowa wymuszona: $y_w[n+1]+\alpha\cdot y_w[n]=1+\beta^{-n}$	$\frac{d}{dt}y_w(t)+\alpha\cdot y_w(t)=1+e^{\beta t}$
jest w postaci (charakter wymuszenia): $y_w[n]=A+B\cdot\beta^{-n}$	$y_w(t)=A+B\cdot e^{\beta t}$
$A+B\cdot\beta^{-(n+1)}+\alpha\left(A+B\cdot\beta^{-n}\right)=1+\beta^{-n}$	$\frac{d}{dt}\left(A+Be^{\beta t}\right)+\alpha\cdot\left(A+Be^{\beta t}\right)=1+e^{\beta t}$
$A(1+\alpha)+B\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\beta^{-n}=1+\beta^{-n}$	$\alpha A+B(\alpha+\beta)e^{\beta t}=1+e^{\beta t}$
$A=\frac{1}{1+\alpha}$ $B=\frac{\beta}{\alpha\beta+1}$	$A=\frac{1}{\alpha}$ $B=\frac{1}{\alpha+\beta}$
$y_w[n]=\frac{1}{1+\alpha}+\frac{\beta}{\alpha\beta+1}\cdot\beta^{-n}$	$y_w(t)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot e^{\beta t}$
Stała całkowania z warunków początkowych: $y_s[0]=A_1=y[0]-y_w[0]$	$y_s(0)=A_1=y(0)-y_w(0)$
$A_1=\gamma-\frac{1}{1+\alpha}-\frac{\beta}{\alpha\beta+1}$	$A_1=\gamma-\frac{1}{\alpha}$
Zatem odpowiedź systemu: $y[n]=\underbrace{\frac{1}{1+\alpha}+\frac{\beta}{\alpha\beta+1}\cdot\beta^{-n}}_{odp.wymuszona}+\underbrace{\left(\gamma-\frac{1}{1+\alpha}-\frac{\beta}{\alpha\beta+1}\right)(-\alpha)^n}_{odp.swobodna}$	$y(t)=\underbrace{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot e^{\beta t}}_{odp.wymuszona}+\underbrace{\left(\gamma-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}}_{odp.swobodna}$

Przykład: Obliczanie odpowiedzi jednostkowej systemu

System dyskretny opisany jest równaniem różnicowym

$$y[n+1]-0.9y[n]=x[n]$$

należy obliczyć przebieg wyjściowy $y[n]$, jeżeli $x[n]=1[n]$ i $y[0]=1$

I. Rozwiązanie przez bezpośrednie podstawienie:

Dla kolejnych wartości n:

$$y[1]=1+0.9$$
$$y[2]=1+(1+0.9)\cdot 0.9=1+0.9.+0.9^2$$
$$y[3]=1+\left(1+0.9+0.9^2\right)\cdot 0.9=1+0.9+0.9^2+0.9^3$$

Stąd ogólnie:

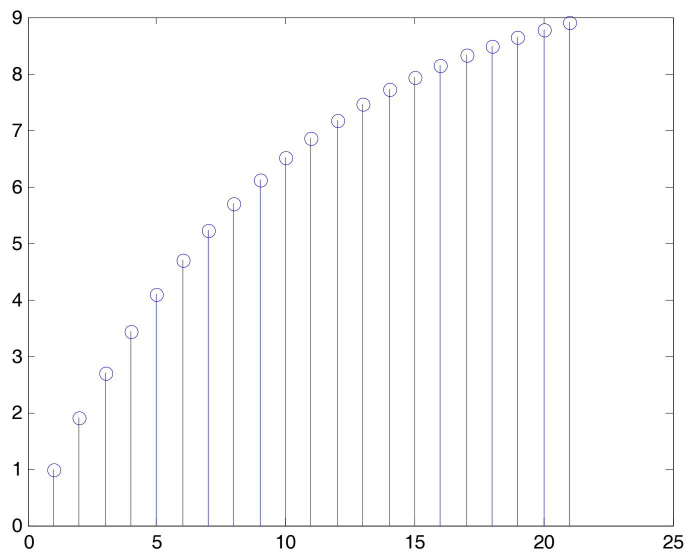
$$y[k]=1+0.9+0.9^2+0.9^3+\cdots+0.9^k$$

Korzystając z zależności na sumę cząstkową ciągu geometrycznego:

$$y[k]=\frac{1-0.9^{k+1}}{1-0.9}=10\left(1-0.9^{k+1}\right),\quad k=0,1,2,...$$

MATLAB

```
clear;
%
% obliczane rekurencyjnie
y0=1;
y=y0;
for k=1:20
y=1+0.9*y;
yy(k)=y;
end
yw=[y0 yy];
figure(1); stem(yw);
%
% wykorzystanie rozwiązania
i=0:20;
yu=10*(1-0.9.^(i+1))
figure(2); stem(yu)
```



II. Rozwiązanie metodą klasyczną:

$$y[n+1]-0.9y[n]=1,\quad y[0]=1$$

Spodziewane rozwiązanie jest sumą składowych – wymuszonej i swobodnej

$$y[n]=y_s[n]+y_w[n]$$

Składowa swobodna jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego:

$$y_s[n+1]-0.9y_s[n]=0$$

Równanie charakterystyczne:

$$s-0.9=0$$

Pierwiastek równania charakterystycznego wynosi

$$s_0=0.9$$

Składowa swobodna ma zatem postać szeregu wykładniczego:

$$y_s[n]=A_1\cdot 0.9^n$$

Składowa wymuszona ma charakter wymuszenia (funkcja stała) i jest szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego

$$y_w[n]=A\quad (const)$$

Wartość A obliczymy z równania różnicowego poprzez porównanie współczynników z lewej i prawej strony dla składowej wymuszonej:

$$y_w[n+1]-0.9y_w[n]=1$$

$$A-0.9A=1$$

$$A=10$$

$$y_w[n]=10$$

Stałą A_1 obliczamy z warunków początkowych, dla $n=0$

$$y[n] = y_w[n] + y_s[n]$$

$$y[0] = y_w[0] + y_s[0]$$

$$1 = 10 + A_1 \cdot 0.9^0$$

$$A_1 = -9$$

Rozwiązanie końcowe:

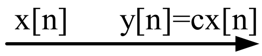
$$y[n] = y_w[n] + y_s[n] = 10 + (-9) \cdot 0.9^n = 10\left(1 - 0.9 \cdot 0.9^n\right)$$

$$y[n] = 10\left(1 - 0.9^{n+1}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

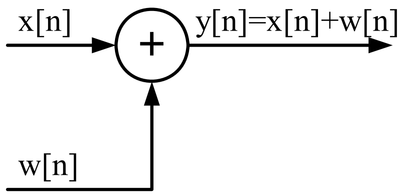
Schematy blokowe

Systemy LTI można przedstawić w postaci schematu blokowego, który jest graficznym zapisem równania różnicowego.

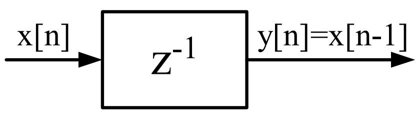
Mnożenie skalarne



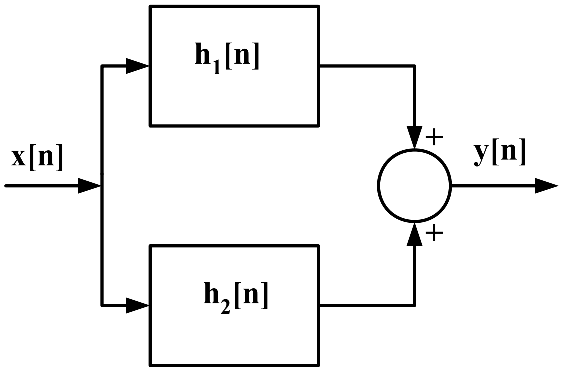
Dodawanie

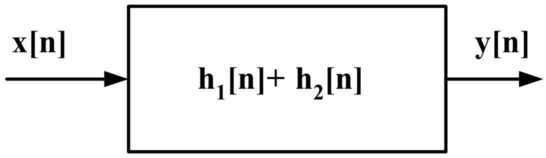


Przesuwanie w czasie



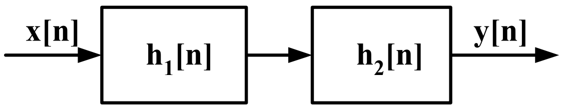
Połączenie równoległe:

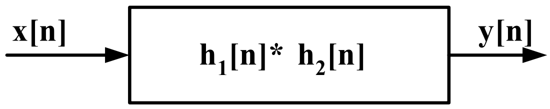




$$x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]=x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)$$

Połączenie kaskadowe:



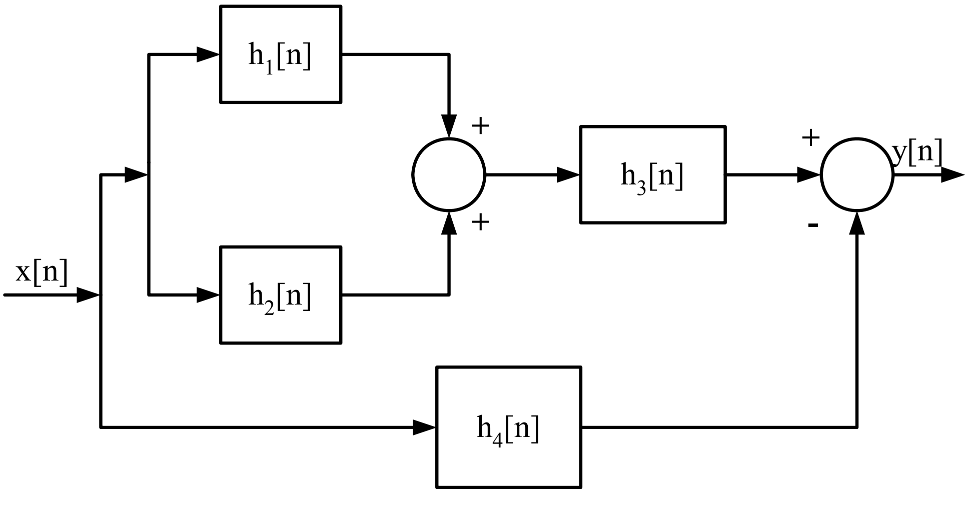


$$\left\{x[n]*h_1[n]\right\}*h_2[n]=x[n]*\left\{h_1[n]*h_2[n]\right\}$$

Przykład:

Wyznacz odpowiedź systemu dyskretnego na wymuszenie:

$$x[n]=2\cdot\delta[n]-\delta[n-1]$$



jeżeli odpowiedzi impulsowe poszczególnych systemów wynoszą:

$$h_1[n] = 1[n]$$
$$h_2[n] = 1[n+2] - 1[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n-2]$$
$$h_4[n] = a^n \cdot 1[n]$$

Rozwiązanie:

$$h[n] = \left(h_1[n] + h_2[n]\right) * h_3[n] - h_4[n]$$

$$h_{12}[n] = 1[n] + 1[n+2] - 1[n] = 1[n+2]$$

$$h_{123}[n] = 1[n+2] * \delta[n-2] = 1[n]$$

Odpowiedź impulsowa całego systemu wynosi:

$$h[n] = \left(1 - a^n\right) \cdot 1[n]$$

Odpowiedź na zadane wymuszenie:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

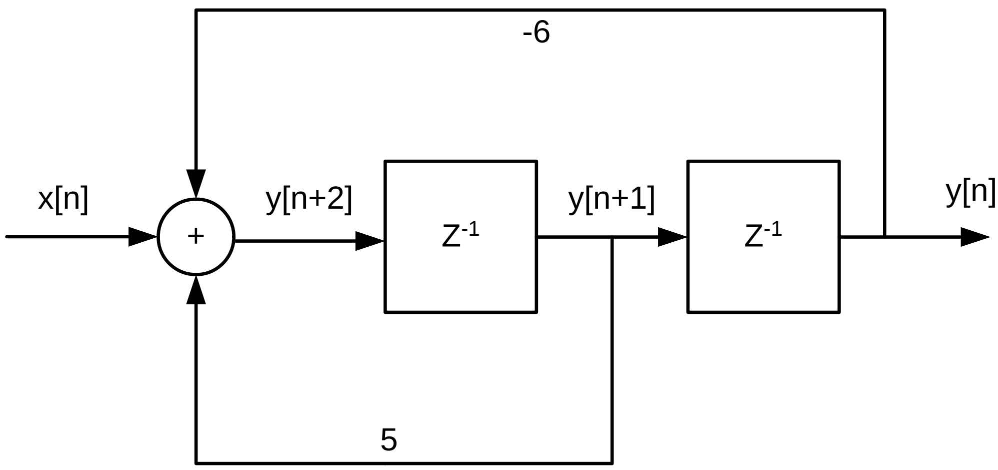
$$y[n] = \left(2 \cdot \delta[n] - \delta[n-1]\right) * h[n]$$

$$y[n] = 2 \cdot h[n] - h[n-1]$$

$$y[n] = 2 \cdot \left(1 - a^n\right) \cdot 1[n] - \left(1 - a^{n-1}\right) \cdot 1[n-1]$$

Przykład:

Wyznaczyć odpowiedź układu (dla zerowych warunków początkowych)



na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego.

Rozwiązanie:

Równanie różnicowe ze schematu blokowego:

$$y[n+2] = x[n] - 6y[n] + 5y[n+1]$$

lub

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n]$$

Wstawiając do równania wymuszenie:

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = 1$$

Metoda klasyczna:

Zakładamy rozwiązanie z postaci 2 składowych:

$$y[n] = y_w[n] + y_s[n]$$

Dla składowej swobodnej:

$$y_s[n+2] - 5y_s[n+1] + 6y_s[n] = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$s^2 - 5s + 6 = 0$$

Pierwiastki równania charakterystycznego:

$$s_1 = 2, s_2 = 3$$

Składowa swobodna będzie miała postać:

*) $$y_s[n] = A_1 2^n + A_2 3^n$$

Składowa wymuszona ma charakter wymuszenia:

$$y_w[n] = A$$

$$y_w[n+2] - 5y_w[n+1] + 6y_w[n] = 1$$

$$A - 5A + 6A = 1$$

$$A - 5A + 6A = 1$$

$$y_w[n] = A = \frac{1}{2}$$

Stałe A_1 i A_2 oblicza się z warunków początkowych dla *n=0* i *n=1*:

$$y[n] = y_w[n] + y_s[n]$$

$$y[0] = y_w[0] + y_s[0]$$
$$y[1] = y_w[1] + y_s[1]$$

$$0 = \frac{1}{2} + A_1 \cdot 2^0 + A_2 \cdot 3^0$$
$$0 = \frac{1}{2} + A_1 \cdot 2^1 + A_2 \cdot 3^1$$

Stąd stałe:

$$A_1 = -1$$

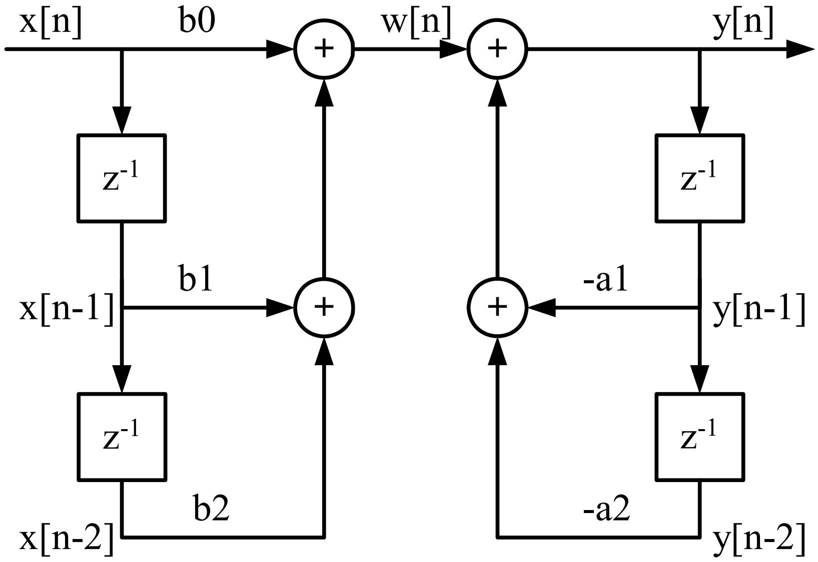
$$A_2 = \frac{1}{2}$$

Ostatecznie odpowiedź systemu wynosi:

$$y\left[n\right]=\underbrace{\frac{1}{2}}_{skl.wymuszona}\quad\underbrace{-2^{n}+\frac{1}{2}3^{n}}_{skl.swobodna}$$

<u>Schemat blokowy układu 2 rzędu</u>

Schemat przedstawia typowy dyskretny system LTI opisany równaniem różnicowym 2 rzędu:



Sygnał wejściowy jest dwa razy przesunięty w czasie, na wyjściach bloków opóźniających otrzymuje się sygnały $x[n\text{-}1]$ i $x[n\text{-}2]$. Sygnały te są skalowane oraz sumowane w wyniku czego otrzymuje się sygnał:

$$w\left[n\right]=b_{0}x\left[n\right]+b_{1}x\left[n-1\right]+b_{2}x\left[n-2\right]$$

Następnie możemy napisać dla sygnału wyjściowego $y[n]$ w zależności od $w[n]$:

$$y\left[n\right]=w\left[n\right]-a_{1}y\left[n-1\right]-a_{2}y\left[n-2\right]$$

Stąd:

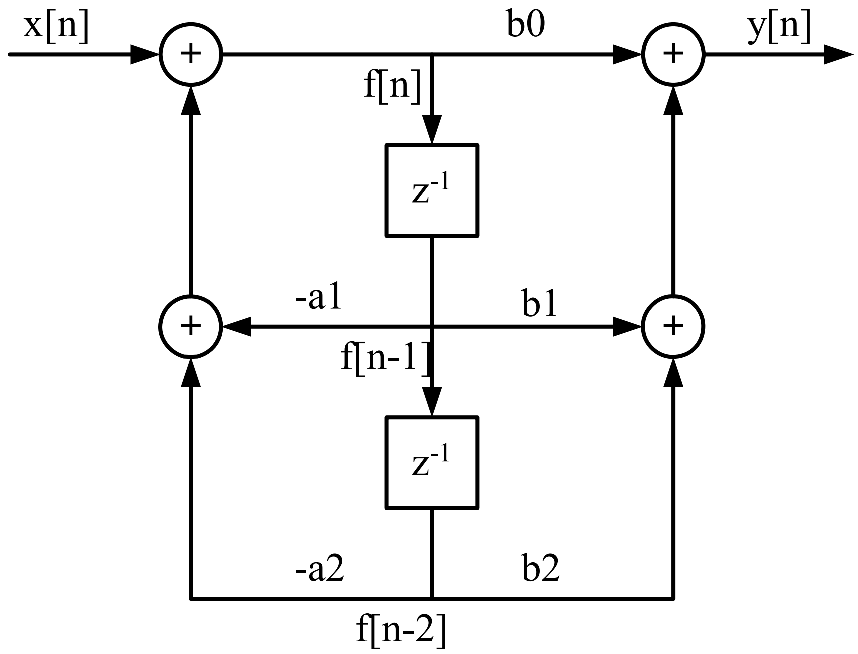
$$y\left[n\right]=b_{0}x\left[n\right]+b_{1}x\left[n-1\right]+b_{2}x\left[n-2\right]-a_{1}y\left[n-1\right]-a_{2}y\left[n-2\right]$$

$$y\left[n\right]+a_{1}y\left[n-1\right]+a_{2}y\left[n-2\right]=b_{0}x\left[n\right]+b_{1}x\left[n-1\right]+b_{2}x\left[n-2\right]$$

lub

$$\sum_{k=0}^{2}a_{k}y\left[n-k\right]=\sum_{l=0}^{2}b_{l}x\left[n-l\right]$$

Alternatywny schemat blokowy dla układu 2 rzędu

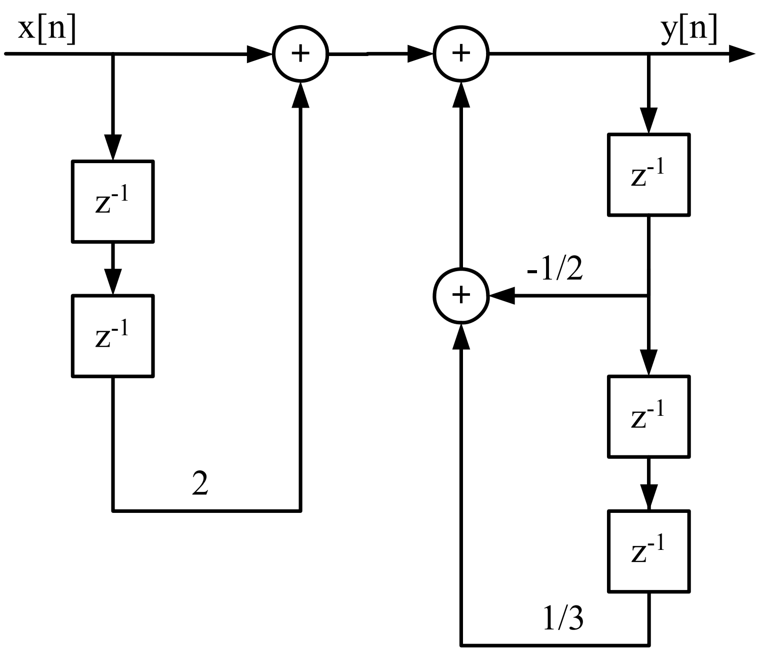


Przykład:

System opisany równaniem należy przedstawić w postaci schematu blokowego:

$$y[n]+\tfrac{1}{2}y[n-1]-\tfrac{1}{3}y[n-3]=x[n]+2x[n-2]$$

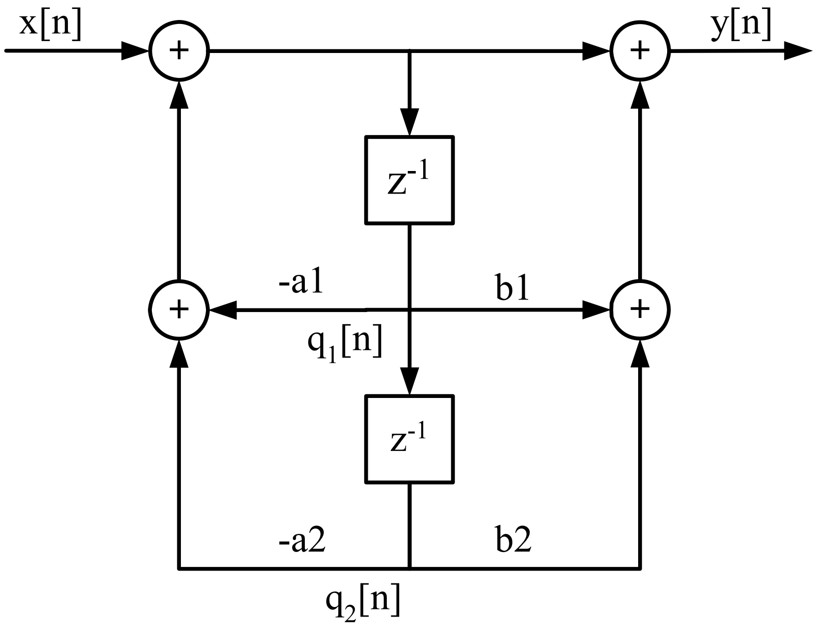
Rozwiązanie



Równania stanu

Opis systemu w przestrzeni stanu polega na utworzeniu układu równań różnicowych pierwszego rzędu opisujących przebiegi zmiennych stanu systemu oraz zależności odpowiedzi systemu od zmiennych stanu i wymuszenia. Równania te przedstawia się w formie macierzowej.

Na schemacie blokowym sygnały *f*[*n-1*], *f*[*n-2*], które znajdują się na wyjściach bloków opóźniających oznaczymy odpowiednio $q_1[n]$ oraz $q_2[n]$. Wielkości te nazywa się **zmiennymi stanu**.



Wartości zmiennych stanu zgodnie ze schematem blokowym wynoszą:

$$q_1[n+1] = -a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n] + x[n]$$

$$q_2[n+1] = q_1[n]$$

Ze schematu możemy także wyznaczyć zależność odpowiedzi od wymuszenia i zmiennych stanu:

$$y[n] = x[n] - a_1 q_1[n] - a_2 q_2[n] + b_1 q_1[n] + b_2 q_2[n]$$

W formie macierzowej powyższe równania:

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + [1] x[n]$$

Definiując wektor stanu jako :

$$\mathbf{Q}[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}$$

Równania stanu zapiszemy:

$$\mathbf{Q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{Q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{Q}[n] + Dx[n]$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = [1]$$

Opis systemu w przestrzeni stanu wykorzystuje się często w obliczeniach numerycznych.

Przykład:

System opisany jest równaniem różnicowym. Wyznacz macierze stanu tego systemu:

$$y[n] + \tfrac{1}{2}y[n-1] - \tfrac{1}{3}y[n-2] = x[n] + 2x[n-2]$$

Rozwiązanie

Postać ogólna równania różnicowego:

$$y[n] + a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

zatem:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} & 2\tfrac{1}{3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = [1]$$