LINIA DŁUGA

1. Wprowadzenie

W przypadkach gdy wymiary geometryczne układów elektrycznych są porównywalne z długością fali elektromagnetycznej, to nie spełniają one warunku quasi-stacjonarności i powinny być opisywane ogólnymi metodami teorii pola elektromagnetycznego. Układy takie nazywa się układami o parametrach rozłożonych.

W pewnych przypadkach można jednak zastosować analizę obwodową do układów o parametrach rozłożonych. Dotyczy to tzw. ***linii długiej*** , gdzie warunek quasi-stacjonarności jest naruszony tylko w jednym kierunku, tzn. przy danej częstotliwości sygnału wymiary wzdłuż osi linii są dużo większe niż w pozostałych kierunkach i porównywalne z długością fali elektromagnetycznej. W takich układach wartości prądów i napięć w linii zależą zarówno od czasu jak i od współrzędnej przestrzennej.

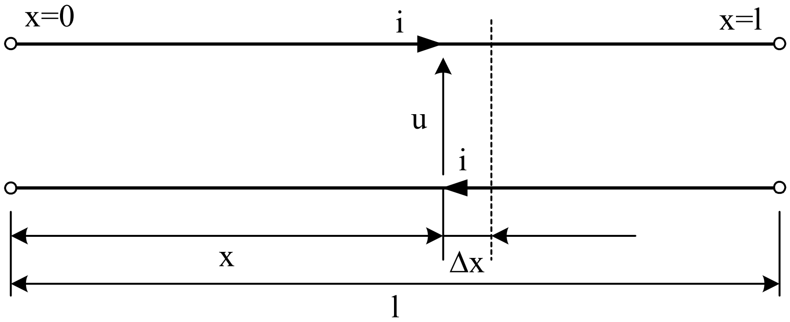
$$\lambda = \frac{c}{f} \tag{0.1}$$

gdzie:

λ - długość fali
c – prędkość światła
f - częstotliwość

f	**λ**	**l**
50 Hz	6000 km	~ 60 km
500 kHz	60 m	~ 60 cm
0.5 GHz	60 cm	~ 60 mm

2. Równania linii długiej



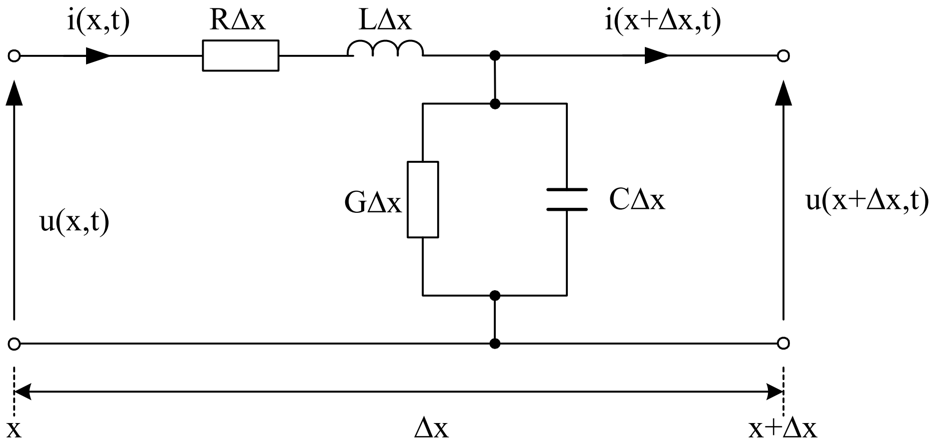
Napięcia i prądy w linii są są funkcjami czasu „t" i współrzędnej długości „x".

$$i = (x,t),\, u = u(x,t) \tag{0.2}$$

Parametry elektryczne są rozłożone wzdłuż linii. Linia charakteryzuje się następującymi parametrami rozłożonymi:

- $R[\Omega / m]$ oporem na jednostkę długości linii
- $L[H / m]$ indukcyjnością na jednostkę długości linii
- $C[F / m]$ pojemnością na jednostkę długości linii
- $G[S / m]$ upływnością na jednostkę długości linii

Zakłada się, że dostatecznie krótki odcinek linii Δx spełnia warunki quasi-stacjonarności, można go zatem zamodelować jako układ skupiony:



Zgodnie z prawami Kirchhoffa:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[Ri(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \right]\cdot \Delta x + u(x+\Delta x,t) \\ i(x,t) &= \left[Gu(x+\Delta x,t) + C\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial t} \right]\cdot \Delta x + i(x+\Delta x,t) \end{aligned} \tag{0.3}$$

$$\begin{aligned} -\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} &= Ri(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ -\frac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x} &= Gu(x+\Delta x,t) + C\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial t} \end{aligned} \tag{0.4}$$

Dla $\Delta x \to 0$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \tag{0.5}$$

gdzie:

$$i = (x,t),\, u = u(x,t)$$

Równania wyrażone (0.5) nazywa się równaniami linii długiej lub ***równaniami telegrafistów***.

3. Stan ustalony przy zasilaniu sinusoidalnym

Zespolone wartości prądu i napięcia linii w punkcie odległym o x od jej początku:

$$\underline{I} = \underline{I}(x), \underline{U} = \underline{U}(x) \tag{0.6}$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= (R + j\omega L)\underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= (G + j\omega C)\underline{U} \end{aligned} \tag{0.7}$$

Po wyrugowaniu prądu z (0.7) otrzymujemy:

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - \gamma^2\underline{U} = 0, \quad \gamma \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{0.8}$$

Gdzie γ nazywa się współczynnikiem propagacji fali.

Rozwiązanie równania różniczkowego (0.8) ma postać:

$$\underline{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \tag{0.9}$$

Na podstawie pierwszego równania (0.7):

$$\underline{I} = -\frac{1}{(R + j\omega L)}\frac{d\underline{U}}{dx} \tag{0.10}$$

Podstawiając (0.9) do (0.10) otrzymamy:

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_f}\left(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}\right), \quad \underline{Z}_f \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{0.11}$$

Gdzie $\underline{Z}_f$ nazywa się impedancją falową.

Stałe A_1 i A_2 wyznacza się na podstawie zwanych wartości U_1 i I_1 na początku linii (x=0) lub U_2 i I_2 na końcu linii (x=l).

Przyjmując jako dane U_1 i I_1 w równaniach (0.9) oraz (0.11) obliczamy dla x=0:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= A_1 + A_2 \\ \underline{I}_1 &= \tfrac{1}{\underline{Z}_f}\left(A_1 - A_2\right) \end{aligned} \tag{0.12}$$

$$A_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2}, \quad A_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} \tag{0.13}$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{\gamma x} \\ \underline{I} &= \frac{1}{\underline{Z}_f}\left(\frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{\gamma x} \right) \end{aligned} \tag{0.14}$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{Z}_f \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \end{aligned} \tag{0.15}$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 ch\left(\gamma x\right) - \underline{Z}_f \underline{I}_1 sh\left(\gamma x\right) \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f} sh\left(\gamma x\right) + \underline{I}_1 ch\left(\gamma x\right) \end{aligned} \tag{0.16}$$

Analogicznie przyjmując jako dane U_2 i I_2 w równaniach (0.9) oraz (0.11) obliczamy dla x=l:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 ch\left(\gamma y\right) + \underline{Z}_f \underline{I}_2 sh\left(\gamma y\right) \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} sh\left(\gamma y\right) + \underline{I}_2 ch\left(\gamma y\right) \\ y &= l - x \end{aligned} \tag{0.17}$$

4. Impedancja wejściowa linii długiej

Impedancja wejściowa:

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \tag{0.18}$$

Stan jałowy (linia otwarta)	Stan zwarcia (linia zwarta)
$\underline{I}_2 = 0$	$\underline{U}_2 = 0$
$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 ch(\gamma l)$ $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} sh(\gamma l)$	$\underline{U}_1 = \underline{Z}_f \underline{I}_2 sh(\gamma l)$ $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 ch(\gamma l)$
$\underline{Z}_{we0} = \underline{Z}_f cth(\gamma l)$	$\underline{Z}_{weZ} = \underline{Z}_f th(\gamma l)$

Parametry falowe linii można obliczyć z pomiarów:

$$\begin{aligned} &\underline{Z}_{we0}\underline{Z}_{weZ} = \underline{Z}_f^2 cth(\gamma l) th(\gamma l) \\ &\underline{Z}_{we0}\underline{Z}_{weZ} = \underline{Z}_f^2 \\ &\underline{Z}_f = \sqrt{\underline{Z}_{we0}\underline{Z}_{weZ}} \end{aligned} \tag{0.19}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\underline{Z}_{we0}}{\underline{Z}_{weZ}} = \frac{cth(\gamma l)}{th(\gamma l)} \\ &\sqrt{\frac{\underline{Z}_{we0}}{\underline{Z}_{weZ}}} = cth(\gamma l) \\ &\gamma = \frac{1}{l} cth^{-1} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{we0}}{\underline{Z}_{weZ}}} = \end{aligned} \tag{0.20}$$

Oznaczając:

$$\underline{Z} = R + j\omega L, \quad \underline{Y} = G + j\omega C \tag{0.21}$$

Z (0.8) oraz z (0.11)mamy:

$$\underline{\gamma} \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\underline{Z}\underline{Y}}, \quad \underline{Z}_f \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} \tag{0.22}$$

Stąd:

$$\underline{Z} = \underline{\gamma}\underline{Z}_f, \quad \underline{Y} = \frac{\gamma}{\underline{Z}_f} \tag{0.23}$$

Oraz parametry jednostkowe linii długiej:

$R = \mathrm{Re}\left\{\gamma Z_f\right\}$	$G = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{\gamma}{Z_f}\right\}$
$L = \dfrac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left\{\gamma Z_f\right\}$	$C = \dfrac{1}{\omega}\mathrm{Im}\left\{\dfrac{\gamma}{Z_f}\right\}$

5. Linia obciążona

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \tag{0.24}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + \underline{Z}_f \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \end{aligned} \tag{0.25}$$

Porządkując względem funkcji wykładniczych:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{1}{2}\left(\underline{U}_2 + \underline{Z}_f \underline{I}_2\right) e^{\gamma l} + \frac{1}{2}\left(\underline{U}_2 - \underline{Z}_f \underline{I}_2\right) e^{-\gamma l} \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} + \underline{I}_2\right) e^{\gamma l} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} + \underline{I}_2\right) e^{-\gamma l} \end{aligned} \tag{0.26}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_{p1} + \underline{U}_{o1} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_{p1} + \underline{I}_{o1} \end{aligned} \tag{0.27}$$

Współczynnik odbicia w odległości y od końca linii:

$$\underline{\Gamma}_u = \frac{U_o}{U_p} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_f \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_f \underline{I}_2} e^{-2\gamma y} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_f}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_f} e^{-2\gamma y} \tag{0.28}$$

6. Linia obciążona falowo

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_f, \quad \Gamma = 0 \tag{0.29}$$

Przy obciążeniu falowym brak fali odbitej:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}\left(\underline{U}_2 + \underline{Z}_f \underline{I}_2\right) e^{\gamma l} = \underline{U}_2 e^{\gamma l} \\ \underline{I} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} + \underline{I}_2\right) e^{\gamma l} = \underline{I}_2 e^{\gamma l} \end{aligned} \tag{0.30}$$

7. Linia bez strat

$$R \ll \omega L, \quad G \ll \omega C \tag{0.31}$$

$$Z_f = R_f = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \tag{0.32}$$

Na podstawie (0.17)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos(\beta y) + jR_f \underline{I}_2 \sin(\beta y) \\ \underline{I} &= j\frac{\underline{U}_2}{R_f} \sin(\beta y) + \underline{I}_2 \cos(\beta y) \end{aligned} \tag{0.33}$$

Impedancja wejściowa

St. jałowy	St. zwarcia	Obc. falowe
$\underline{Z}_2 = \infty$	$\underline{Z}_2 = 0$	$\underline{Z}_2 = R_f$
$Z_{we0} = -jR_f ctg(\beta l)$	$Z_{weZ} = jR_f tg(\beta l)$	$Z_{we} = R_f$

8. Linia długa jako czwórnik:

Równania (0.17) dla całej długości y=l zapiszemy w postaci

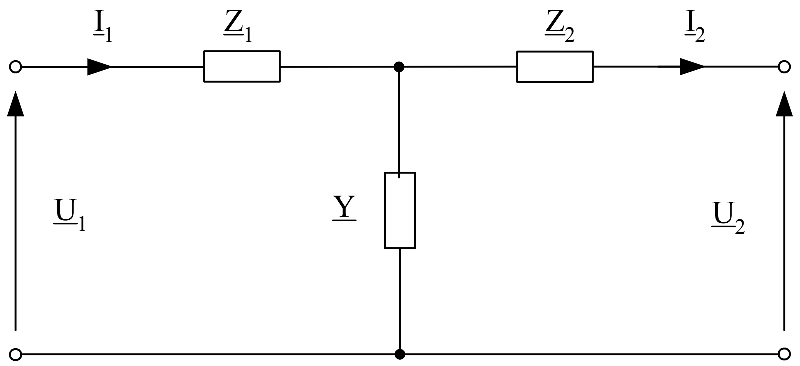
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 ch(\gamma l) + \underline{Z}_f \underline{I}_2 sh(\gamma l) \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} sh(\gamma l) + \underline{I}_2 ch(\gamma l) \end{aligned} \tag{0.34}$$

W postaci macierzowej równania łańcuchowe:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(\gamma l) & Z_f sh(\gamma l) \\ 1/Z_f sh(\gamma l) & ch(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \tag{0.35}$$

Ponieważ $\mathbf{a_{11}=a_{22}}$ oraz **detA=1** czwórnik jest ***symetryczny***

Czwórnik typu T



Równania łańcuchowe czwórnika typu T:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\underline{Z}_1\underline{Y} & \underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y} \\ \underline{Y} & 1+\underline{Z}_2\underline{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \tag{0.36}$$

Stąd porównując (0.36) oraz (0.35):

$$\begin{aligned} &\underline{Z}_1 = \underline{Z}_f\left(cth(\gamma l) - ch(\gamma l)\right) \\ &\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 \\ &\underline{Y} = 1/\underline{Z}_f sh(\gamma l) \end{aligned} \tag{0.37}$$

9. Przykłady

<u>Linia długa jako indukcyjność</u>

Pytamy się przy jakiej długości linii „l” o parametrach jak w tabeli równoważna jest ona indukcyjności o wartości „L” ?

Dane:

R_f	f	β	Linia zwarta	Linia bez strat

$$\begin{aligned} &Z_{weZ} = jR_f tg(\beta l) = j\omega L \\ &R_f tg(\beta l) = \omega L \\ &tg(\beta l) = \frac{\omega L}{R_f} \\ &\beta l = arctg\left(\frac{\omega L}{R_f}\right) \\ &l = \frac{1}{\beta} arctg\left(\frac{\omega L}{R_f}\right) \end{aligned} \tag{0.38}$$

Rezonans napięć

Linia długa o danych jak w tabeli obciążona jest indukcyjnością L2. Jaką wartość ma L2 jeżeli wiadomo że obwód znajduje się w stanie rezonansu ?
Dane:

R_f	β	L_2	f	Linia bez strat

Warunek rezonansu:

$$Im\left(\underline{Z}_{we}\right)=0 \tag{0.39}$$

Stąd zgodnie z (0.33)

$$\begin{aligned}
&\underline{Z}_{we}=\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}=jR_f\,\frac{\omega L_2+R_f tg\left(\beta l\right)}{R_f-\omega L_2 tg\left(\beta l\right)}\\
&L_2\neq\frac{R_f}{\omega}ctg\left(\beta l\right)\\
&L_2=-\frac{R_f}{\omega}tg\left(\beta l\right)
\end{aligned} \tag{0.40}$$

Obliczanie napięć i prądów linii:

Dane:

R	L	G	C	f	l	$l_{1(\text{od końca})}$
2,87Ω/km	1,94mH/km	0,14μS/km	6,35nF/km	800Hz	100km	20km

$$\begin{aligned}
&\underline{Z}=R+j\omega L=2{,}87+j9{,}75=10{,}2e^{j73^\circ}\left[\tfrac{\Omega}{km}\right]\\
&\underline{Y}=G+j\omega C=\left(0{,}14+j32\right)10^{-6}=32\cdot10^{-6}e^{j90^\circ}\left[\tfrac{S}{km}\right]
\end{aligned} \tag{0.41}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\gamma}=\sqrt{\underline{Z}\underline{Y}}=18\cdot10^{-3}e^{j81{,}5^\circ}\left[\tfrac{1}{km}\right]\\
&\underline{Z}_f=\sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}=564e^{-j8{,}5^\circ}\left[\Omega\right]
\end{aligned} \tag{0.42}$$

$$\gamma=\alpha+j\beta=2{,}56\cdot10^{-3}\left[\tfrac{Np}{km}\right]+j17{,}8\cdot10^{-3}\left[\tfrac{rd}{km}\right] \tag{0.43}$$

Napięcie i prąd w linii (linia otwarta):

$$\begin{aligned}
&\underline{I}_2=0\\
&\underline{U}=\underline{U}_2ch\left(\gamma l_1\right),\qquad \underline{U}_1=\underline{U}_2ch\left(\gamma l\right)\\
&\underline{I}=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f}sh\left(\gamma l_1\right),\qquad \underline{I}_1=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f}sh\left(\gamma l\right)
\end{aligned} \tag{0.44}$$